


Help - Matematica



*Culegere de probleme pentru pregătirea elevilor
în vederea susținerii examenului de Bacalaureat,
proba de matematică*



Culegere de probleme realizată în baza activităților remediale derulate în cadrul acordului de grant nr. SGL/RI/183/27.06.2017 de la Colegiul Tehnic "Gh.Asachi" Iași în anul 2019, proiect privind învățământul secundar (ROSE)

ACTIVITATEA A1.

Pregătire remedială pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat, sesiunea iunie-iulie 2019, proba de matematică

Profil: servicii, resurse naturale și protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

Help - Matematica

Culegere de probleme

Culegere de probleme realizată în baza activităților remediale derulate în cadrul acordului de grant nr. SGL/RI/183/27.06.2017 de la Colegiul Tehnic "Gh.Asachi" Iași în anul 2019, proiect privind învățământul secundar (ROSE)

ACTIVITATEA A1.

Pregătire remedială pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat, sesiunea iunie-iulie 2019, proba de matematică

Profil: servicii, resurse naturale și protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

EDITURA

IAȘI, 2019

Referent științific: Conf. Dr. Anca CROITORU

ISBN :



Motto

„Matematica este un mod de exprimare a legilor naturale, este cel mai simplu și cel mai potrivit chip de a înfățișa o lege generală sau curgerea unui fenomen, este cea mai perfectă limbă în care se poate povesti un fenomen natural.”

Gheorghe Țițeica (1873-1939)

Prefață

Puternic ancorată în realitățile contemporane și cu implicații în toate domeniile, matematica zilelor noastre devine tot mai mult modelul spre care privesc cu încredere și interes celelalte științe. Matematica a pătruns treptat și din ce în ce mai mult, în sfera conceptului de cultură generală și de cultură de specialitate, lăsând puține sectoare lipsite de prezența ei. În contextul noii reforme curriculare, semnificația și importanța teoretică și practică a matematicii cresc mereu, făcând din ea unul dintre principalele obiecte de instruire cu necontestate valențe formative, predarea ei în școală devenind obiectul unor cercetări științifice de mare anvergură.

Întelegerea esenței matematice este realizabilă numai prin studierea profundă a elementelor ei componente: algebră, geometrie, trigonometrie, analiză matematică.

Lucrarea de față abordează, atât din punct de vedere științific, cât și metodic, recapitularea materiei din clasele aIXa - aXIIa conform programei de bacalaureat 2019, proba de matematică, pe parcursul a cinci capitole. Ea este realizată pe baza fișelor de lucru folosite în cadrul activităților remediale derulate în cadrul Proiectului ROSE, proiect privind învățământul secundar.

În primul capitol se recapitulează materia de algebră din clasele a IXa respectiv, a Xa. Capitolul doi al lucrării de față se continuă cu geometria vectorială, trigonometrie, aplicații ale trigonometriei în geometrie, respectiv geometrie analitică. În capitolul trei, respectiv patru, se recapitulează elemente de algebră superioară și analiză matematică. Lucrarea se încheie cu capitolul cinci în care se propune spre rezolvare variante de tip simulare în cele două sesiuni dintr-un an școlar (decembrie, martie) la nivel liceal, clasa

a XIIa zi, respectiv a XIIIa seral, precum și variante de examen care s-au dat la proba de matematică, Bacalaureat, din ultimii ani școlari.

Lucrarea, prin tema și conținutul său, se dorește a fi un ghid veritabil în însușirea temeinică a unor noțiuni de algebră, geometrie vectorială, trigonometrie, elemente de analiză matematică respectiv, elemente de algebră superioară prin fișele de lucru propuse spre rezolvare, un ghid metodic pentru profesori, prin exemplele propuse, putând fi folosit atât în activitatea de la clasă, cât și la activități școlare din cadrul acestui proiect.

Unele capitole sau subcapitole au și breviar teoretic care are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim sau mediu de competență și nu reprezintă o listă exhaustivă. De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență, funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

Mulțumesc pe această cale doamnei profesor Conf. Dr. Anca Croitoru pentru sprijinul acordat în realizarea lucrării de față.

Test inițial

Identificarea nevoilor grupului țintă

Subiect I

(10 pct) 1. Arătați că numărul $\log_3 9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{16}$ este un număr natural.

(10 pct) 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$.

(10 pct) 3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1 = 2$ și rația $r = 4$. Calculați a_5 .

Subiect II

1. Pe mulțimea $G = (7, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 7x - 7y + 56$.

(10 pct) a) Calculați $7 * 8 * 9$, știind că legea "*" este asociativă.

(10 pct) b) Determinați elementul neutru $e \in G$ al legii "*", pentru orice $x \in G$.

(10 pct) c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația $x * x = 7$.

Subiect III

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}$.

(10 pct) a) Calculați $\int (x^2 + 4) \cdot f(x) dx$.

(10 pct) b) Demonstrați că g este o primitivă a funcției f , unde funcția

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \arctg \frac{x}{2}$.

(10 pct) c) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(0) = 2$.

Oficiu: 10 pct

Barem de evaluare

Subiect I

1	$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$	2p
	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$	1p
	$\sqrt{16} = 4$	1p
	Finalizare: $2 + 2 - 4 = 0 \in \mathbb{N}$.	2p

2	$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ $\Delta = b^2 - 4ac = 25$ $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{4}$	2p 1p 2p
3	$a_5 = a_1 + 4 \cdot r$ <p>Finalizare: $a_5 = 2 + 4 \cdot 4 = 18$</p>	3p 2p

Subiect II

1a	$7 * 8 = 7$ $7 * 8 * 9 = (7 * 8) * 9 = 7 * 9 = 7$	3p 2p
1b	$(\exists) e \in G$ așa încât $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in G$ $x * e = x \Leftrightarrow xe - 7x - 7e + 56 = x \Leftrightarrow e(x - 7) = 8(x - 7)$ și cum $x \neq 7 (x \in G) \Rightarrow e = 8 \in G$	2p 3p
1c	$x * x = 7 \Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0 \Rightarrow x = 7$	5p

Subiect III

1 a	$\int (x^2 + 4) \cdot g(x) dx = \int (x^2 + 4) \cdot \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4} dx =$ $= \int (x^2 + 2) dx = \int x^2 dx + 2 \int dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$	5p
1 b	<p>1) Funcția g este o funcție continuă pe R ca fiind o funcție compusă din funcții elementare</p> $g'(x) = \left(x - \arctg \frac{x}{2} \right)' = 1 - \frac{1}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{x^2 + 4} =$ $= \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4} = f(x), (\forall) x \in R$ <p>Din 1) și 2) \Rightarrow funcția g este o primitivă a funcției f, pentru orice $x \in R$.</p>	1p 3p 1p
1 c	<p>Din b) $\Rightarrow F: R \rightarrow R, F(x) = x - \arctg \frac{x}{2} + c$ o primitivă a funcției f.</p> <p>Din $F(0) = 1 \Rightarrow c = 2$</p> <p>Finalizare: $F(x) = x - \arctg \frac{x}{2} + 2, F: R \rightarrow R$ este o primitivă a funcției f.</p>	2p 2p 1p

Notă: se acordă 10 pct din oficiu

Cap. I. ALGEBRĂ

1.1. Mulțimea numerelor reale

1. Arătați că numărul $n = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ este natural.
2. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 0,5) = \frac{3}{4}$.
3. Arătați că $\sqrt{3}(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{6}) = 0$.
4. Arătați că $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) = 1$.
5. Arătați că numărul $n = \sqrt{8}(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.
6. Calculați media aritmetică a numerelor $a = \sqrt[3]{125}$ și $b = \log_5 125$.
7. Arătați că $(2 + \sqrt{3})^2 + (1 - 2\sqrt{3})^2 = 20$.
8. Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2} = 3$.
9. Arătați că $\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \frac{7}{6} = 2$.
10. Arătați că $\left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} = 2$.
11. Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{6} = 1$.
12. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 8$ și $b = \sqrt{16}$.
13. Arătați că $\left(\frac{5}{9} + \frac{7}{9}\right) \cdot \frac{27}{6} = 6$

14. Arătați că $(\sqrt{8} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5$

15. Arătați că $\left(1 - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{4} = 1$.

16. Arătați că $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{10}{3} = 1$.

17. Arătați că $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{12} = 1$.

18. Arătați că $1 - \frac{1}{2} : 0,5 = 0$.

19. Arătați că $1 - \frac{1}{4} : 0,25 = 0$.

20. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

1.2. Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Cadru teoretic

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ - progresie aritmetică a_1 - primul termen, r - rația ($r \in \mathbb{R}^*$)

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ - progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2$

Termenul general: $a_{n+1} = a_n + r$; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Suma primilor n -termeni ai unei progresii aritmetice:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ sau } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ - progresie geometrică a_1 - primul termen, q - rația ($q \in \mathbb{R}^*$, $q \neq 1$)

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ - progresie geometrică $\Leftrightarrow q_n = \sqrt{q_{n-1} \cdot q_{n+1}}$

Termenul general: $a_{n+1} = a_n \cdot q$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Suma primilor n -termeni ai unei progresii geometrice: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Exerciții propuse spre rezolvare:

1. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 și 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Să se verifice că numerele $1, \log_3 9$ și $\sqrt[3]{64}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice
3. Aflați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele reale $x, \frac{2x+1}{2}, 3x$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
4. Să se determine numărul real x , știind că următorii termenii consecutivi sunt termenii unei progresii aritmetice:
 - a) $x-1, x+1$ și $2x-1$.
 - b) $x^2-1, 3x-4$ și $x-1$.
5. Să se determine numărul real x , știind că $2^x-1, 4^x$ și $2^{x+1}+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
6. Să se determine numărul real x , știind că $5-x, x+7$ și $3x+11$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
7. Progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație r este definită prin anumite elemente date. Determinați, în fiecare din cazuri, elementele cerute:
 - a). $a_1 = -1, r = 2$. Calculați a_{20}
 - b). $a_{30} = 60, r = 2$. Calculați a_1, a_{20} .
8. Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_{10} - a_2 = 16$.
9. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și $a_2 = 7$.
10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x+2$. Să se calculeze $f(0) + f(1) + \dots + f(2012)$.
11. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice știind că rația este egală cu $1/2$ și primul termen este 8.
12. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 3$ și $b_2 = 12$. Să se calculeze b_5 .

1.3. Funcția de gradul I

Def. apartenența unui punct la graficul unei funcții, intersecția cu axele Ox și Oy, rezolvarea ecuațiilor "f(x)=0".

Funcția de gradul întâi: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$A(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$G_f \cap Oy: x = 0 \Leftrightarrow y = f(0)$$

$$G_f \cap Ox: y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$G_f \cap G_g \Leftrightarrow y = f(x) = g(x).$$

Exerciții propuse spre rezolvare:

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2+x$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x-3$. Să se determine $f(-4) \cdot f(-3) \cdot \dots \cdot f(4) \cdot f(3)$.

4. Determinați funcția de gradul întâi definită prin $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$, știind că $f(0) = 3$ și $f(-1) = 1$.
5. Să se determine funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b, a, b \in R, a \neq 0$, știind că $f(1) = 3$ și $f(2) = 9$.
6. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$. Să se determine numerele reale a și b știind că $3f(x) + 2 = 3x + 5$, pentru $\forall x \in R$.
7. Să se determine funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b, a, b \in R, a \neq 0$, al cărei grafic conține punctele $A(2,7)$ și $B(-1,-2)$.
8. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + l$. Să se determine punctul care aparține graficului funcției f și are abscisa egală cu ordonata.
9. Să se determine intersecția graficului funcției f cu axele de coordonate, unde $f: R \rightarrow R, f(x) = 3x - 9$.
10. Să se determine coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f, g: R \rightarrow R, f(x) = 2x - 4$ și $g(x) = 3 - x$.
11. Să se determine punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g , unde $f, g: R \rightarrow R, f(x) = 3x - 5, g(x) = 7 - x$.

1.4. Funcția de gradul al II-lea

Def. apartenența unui punct la graficul unei funcții, intersecția cu axele Ox și Oy , rezolvarea ecuațiilor " $f(x) = 0$ ".

Funcția de gradul al doilea: $f: R \rightarrow R, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in R, a \neq 0$

$A(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$

$G_f \cap Oy: x = 0 \Leftrightarrow y = f(0)$

$G_f \cap Ox: y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$G_f \cap G_g \Leftrightarrow y = f(x) = g(x)$.

Exerciții propuse spre rezolvare

1. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 11x + 30$. Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(6)$.
2. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 3x + 1$. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m, -1)$ aparține graficului funcției f .
3. Să se determine funcția de gradul al II-lea al cărei grafic conține punctele $A(1;3), B(0;5)$ și $C(-1;11)$.
4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale reprezentării grafice a funcției $f: R \rightarrow R, f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa Ox .

Relațiile lui Viète. Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea

1. Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care $x=5$ este soluție a ecuației $m^2(x-1) = x-3m+2$.
2. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, știind că aceasta are soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.
3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1 + x_2 = 2$ și $x_1 x_2 = -3$.
4. Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.
5. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$.
6. Se consideră ecuația $x^2 + 3x - 5 = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$.
7. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - x - 1 = 0$ verifică relația $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2$.
8. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 11$.
9. Se consideră ecuația $x^2 + mx + 2 = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5$.
10. Se consideră ecuația $x^2 - x + m = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine numărul m pentru care $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = -\frac{3}{4}$.
11. Să se determine valorile reale ale parametrului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + (m-1)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 = 3x_2$.
12. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - mx - m - 6 = 0$ verifică relația $4(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0$.
13. Să se demonstreze că, dacă $a \in \mathbb{R}^*$, atunci ecuația $ax^2 - (2a+1)x + a + 1 = 0$ are două soluții reale distincte.
14. Să se demonstreze că pentru orice a real, ecuația de gradul al doilea $(1 + \cos a)x^2 - (2 \sin a)x + 1 - \cos a = 0$ admite soluții reale egale.
15. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.

16. Să se demonstreze că pentru orice $m \in R$ ecuația $x^2 + mx - m^2 - 1 = 0$ are două soluții reale distincte.

1.5. Ecuații, inecuații, sisteme de două ecuații cu două necunoscute

1. Să se rezolve inecuațiile : a) $\frac{2}{x-3} < 0$; b) $\frac{x+6}{2x-3} > 0$
2. Să se rezolve ecuația : $|2x+5| + x = 3$.
3. Să se rezolve în R ecuațiile: a) $x^2 - 9 = 0$ b) $6x^2 - 13x + 6 = 0$
4. Să se rezolve în R inecuațiile: a) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$, b) $x^2 - 4x + 6 < 0$.
6. Să se rezolve ecuațiile: $(x+1)^2 = 25$; $(2x-1)^2 = 49$; $(1+x)^2 = 36$
7. Să se calculeze suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2 - 5x + 5 \leq 1$.
8. Să se determine suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.
9. Să se determine suma soluțiilor naturale ale inecuației $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.
10. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $(x-1)^2 + x - 7 < 0$.
11. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $x^2 - 9 \leq 0$.

1.6. Puteri și radicali. Ecuații iraționale

Proprietățile puterilor și radicalilor; ecuații iraționale

1. Calculați:

a) $E(a) = \frac{1/2 - a^{-1}}{1/4 - (1/a)^2} : \left[\frac{1}{2^{-2}(2+a)} - 2a^{-1} - 1 \right]$, pentru $a = -\frac{1}{2}$;

b) $(0,001)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{4}{3}} + (9^0)^2 \cdot 5$.

2. Să se calculeze $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

3. Să arate că numărul $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ este natural.

4. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$.

5. Să se arate că $\log_2 \frac{1}{4} - \sqrt[3]{-8} = 0$.
6. Să se compare numerele 2^3 și $\log_2 32$.
7. Să arate că numărul $(\sqrt[3]{2})^{\log_2 8}$ este natural.
8. Rezolvați ecuațiile iraționale:
 a) $\sqrt{x+2} = 3$; b) $\sqrt{3-2x} = x$; c) $\sqrt{x+1} = x-1$; d) $\sqrt{x+1} = 5-x$;
 e) $\sqrt{2x-6} + \sqrt{1-x} = 9$; f) $\sqrt{x^2+5} + \sqrt{4-3x} = -7$
9. Rezolvați ecuațiile iraționale: a) $\sqrt[3]{x+3} = 1$; b) $\sqrt[3]{4-2x} = 2$;

1.6. Calcule cu logaritmi

1. Să se calculeze $\log_2 3 - \frac{1}{2} \log_2 9$.
2. Să se calculeze $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$.
3. Să se calculeze $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10$.
4. Să arate că $\log_2 4 + \log_3 9 < \sqrt{36}$.
5. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$.
6. Să se arate că $\log_3 24 = 3a + 1$, unde $a = \log_3 2$.

1.7. Ecuații exponențiale. Ecuații logaritmice

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației

$$3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}; \quad 125^x = \frac{1}{5}; \quad 2^{x^2+3x-2} = 8.; \quad 4^{x+2} = 2^{x^2+5};$$

$$2^{\sqrt{x-1}} = 4; 2^{x^2+x+1} = 8.; \quad 3^x \cdot 5^x = 15.; \quad 3^{1-x} = 9.; \quad \frac{1}{2^x} = \frac{4^x}{8}; \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{1}{2^x} = 4.; \quad \frac{1}{3^x} = 9.$$

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației
 $2^{x-1} + 2^x = 12$; $2^x + 2^{x+3} = 36$; $2^{x+3} - 2^x = 28$.; $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$.;
- $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$.; $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 7$.; $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.;
- $2^{\log_2 x} = 4$.
3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4) = 2$.
4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-3) = 0$.
5. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(x^2 - 4x + 4) = 2$.
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația $\log_2 x^2 = 2$.
7. Să se rezolve ecuația $\log_3(x^2 - 1) = 1$.
8. Să se rezolve ecuația $\lg^2 x - 4 \lg x + 3 = 0$.
9. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$.
10. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$.
11. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_8(x^2 - 6) = \log_8(2x - 3)$.
12. Să se rezolve ecuația $\log_2(2x+5) = \log_2(x^2 + 3x + 3)$.
13. Să se rezolve ecuația $\log_2(x^2 - 4) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$.
14. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$.
15. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+1) = 1 + \log_5(x-1)$.
16. Să se rezolve reale ecuația $\log_2(x^2 - x - 2) - \log_2(2x - 4) = 1$.
17. Să se rezolve ecuația $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$.
18. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(2^{x+1} - 1) = 0$.
19. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$.

1.8. Elemente de combinatorică - metode de numărare

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. Să se calculeze $C_3^2 + P_3$. | 2. Să se calculeze $C_5^4 + A_5^4$. |
| 3. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$ | 5. Să se calculeze $A_5^2 - P_3$. |
| 4. Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$. | 7. Să se calculeze $C_5^1 + 1 = 3!$. |
| 6. Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$. | 9. Să se calculeze $C_4^2 + C_4^3$. |
| 8. Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$. | 11. Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$. |
| 10. Să se calculeze $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$ | |

12. Să se calculeze $\frac{P_2 + C_4^1}{A_3^1}$.
13. Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.
14. Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.
15. Să se calculeze $2C_3^1 - A_3^2$.
16. Să se calculeze $C_4^2 + C_4^3$.
17. Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente ce se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$.
18. Să se calculeze numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,3,4\}$ care au un număr par nenul de elemente.
19. Să se determine câte numere de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
20. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
21. Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii A .
22. Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii A .
23. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 6 elemente.
24. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5,6?
25. Să se determine numărul natural n știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.
26. Să se rezolve ecuația $A_n^2 = 12, n \in \mathbb{N}$.
27. Rezolvați ecuațiile: $A_{n-5}^3 = 24$; $A_{n+3}^3 = 30 \frac{P_{n+1}}{P_n}$; $C_n^3 = 2n$; $C_{x+2}^2 = 3$;
 $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^3 = 392$
28. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 28, n \in \mathbb{N}$.
29. Să se determine valorile naturale ale numărului n astfel încât $C_n^0 + C_n^1 = 8$.
30. Rezolvă inegalitățile: $A_{2n-1}^2 \leq 930$; $182A_n^2 \geq A_{n+2}^4$; $C_n^6 > C_n^4$; $C_{12}^n \leq C_{12}^{n+2}$
31. Se consideră toate numerele naturale de câte trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1,2\}$. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
32. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr rațional

33. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{10}\}$, acesta să fie număr rațional.
34. Să calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n! < 50$.
35. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 2^n$.
36. Să calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele P_3, A_3^1 și C_4^3 acesta să fie divizibil cu 3.
37. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ul este de 19%).
38. După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.

Cap. II. GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

2.1. Vectori

1. Dacă $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.
2. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O . Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO}$.
3. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
4. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ știind că A, B și C sunt vârfurile unui triunghi.
5. Dacă $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.
6. Fie punctele $A(2;-1)$ și $B(-1;3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4;-8)$ și $B(6;3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
8. Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.
9. În reperul cartezian (O, \vec{i}, \vec{j}) se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.
10. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2;-1)$ și $\overrightarrow{OB}(1,2)$. Să se determine coordonatele vectorului \overrightarrow{OM} , unde M este mijlocul segmentului AB .
11. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.
12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ și $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. *(Varianta_2, 2009)*
13. În reperul cartezian (O, \vec{i}, \vec{j}) se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$. *(Varianta_5, 2009)*

14. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ și $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α și β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β) .
(Varianta_8, 2009)

15. Se consideră vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = (a+3)\vec{i} + 2a\vec{j}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul $a > 0$ pentru care vectorii \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt coliniari.
(Model, Bacalaureat, 2012)

16. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = (2a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+3)\vec{i} + 4\vec{j}$ să fie vectori egali. (Simulare, Aprilie, Iași, 2013)

17. Calculați modulul vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, știind că $A(1,2)$ și $B(3,-5)$.
(Simulare, Decembrie, Iași, 2018)

2.2. Trigonometrie

1. Să se demonstreze că expresia $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x$ este constantă pentru orice $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Să se calculeze $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ$.

3. Să se calculeze $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

4. Să se calculeze $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$.

5. Să se calculeze $\sin 120^\circ$.

6. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.

7. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și că x este măsura unui unghi ascuțit.

8. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in (0^\circ; 90^\circ)$.

9. Să se calculeze $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} x$ știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și că x este măsura unui unghi ascuțit.

10. Să se determine $\cos(180^\circ - x)$, știind că x este măsura unui unghi ascuțit și $\cos x = \frac{1}{2}$.

11. Știind că $\sin x = \frac{4}{5}$, să se calculeze $\sin(180^\circ - x)$.
12. Să se arate ca, pentru orice unghi ascuțit x , este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$.
13. Să se calculeze $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$.
14. Să se calculeze $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ$.
15. Să se calculeze $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$.
16. Să se calculeze $\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ$.
17. Să se calculeze $\sin^2 100^\circ + \cos^2 80^\circ$.
18. Să se calculeze $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$.
19. Să se calculeze $\cos^2 30^\circ + \sin^2 150^\circ$.
20. Să se calculeze $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$.
21. Să se calculeze $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$.
22. Să se calculeze $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$.
23. Să se calculeze $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$.
24. Să se calculeze $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$.
25. Să se calculeze $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$.
26. Să se calculeze $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$.
27. Să se calculeze $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$.
28. Să se verifice că în orice triunghi dreptunghic ABC , de ipotenuză BC , are loc relația $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$.
29. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$, acesta să fie un număr rațional.
30. Arătați că $\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \cos 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$.

Simulare 2017, Martie

2.3. Aplicații ale trigonometriei în geometria plană

1. Se consideră triunghiul ABC având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$ știind că $AB=6$ și $AC=10$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4$, $AC=\sqrt{7}$ și $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

3. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AC=2$, $m(\angle BAC) = 30^\circ$ și $AB=4$.
4. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB = AC = \sqrt{2}$, $m(\angle A) = 30^\circ$.
5. Să se afle raza cercului circumcris triunghiului ABC știind că $AB=3$ și $m(\angle C) = 30^\circ$.
6. Fie triunghiul dreptunghic ABC și D mijlocul ipotenuzei BC . Să se calculeze lungimea laturii AB știind că $AC=6$ și $AD=5$.
7. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=1$, $AC=2$ și $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.
8. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$. Să se calculeze $\cos A$.
9. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=2\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{3}$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.
10. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.
11. Să se afle raza cercului circumcris triunghiului ABC știind că $BC=8$ și $m(\angle A) = 45^\circ$.
12. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 6, cu $AB=3$ și $BC=8$. Să se calculeze $\sin B$.
13. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii AB știind că $AC=2$ și că $m(\angle A) = 30^\circ$.
14. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB=2$, $BC=4$ și $m(\angle B) = 60^\circ$.
15. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\angle A) = 60^\circ$.
16. Să se calculeze lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC știind că $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.
17. Raza cercului cirmumscriș triunghiului ABC este $\frac{3}{2}$, iar $BC=3$. Să se calculeze $\sin A$.
18. Să se determine numărul real x pentru care x , $x+7$ și $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
19. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.
20. Să se calculeze $\sin A$, știind că în triunghiul ABC se cunosc $AB=4$, $BC=2$ și $m(\angle C) = 60^\circ$.

21. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=\sqrt{3}$, $AC=6$ și $m(\hat{A})=120^\circ$.

22. Fie triunghiul MNP cu $MN=3$, $MP=5$ și $m(\angle M)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii NP .

23. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 6. Să se determine lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei triunghiului.

24. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$. Calculați $\cos C$.

Simulare 2016, Martie

25. Calculați aria triunghiului MNP , știind că $MN = 4$ și $m(\angle N)=m(\angle P)=75^\circ$.

Simulare 2018, Martie

2.4. Elemente de geometrie analitică

Ecuția carteziană a dreptei în plan: $ax+bz+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

1. Ecuții ale dreptei în plan determinată de un punct și de o direcție dată

d - dreaptă, un punct $A(x_A, y_B) \in d$ și vectorul $\vec{u} = (x_0, y_0)$.

În aceste condiții, ecuația dreptei ce trece prin punctul A și are direcția vectorului u va fi dată de relația:

$$\mathbf{d}: y - y_A = \frac{y_0}{x_0} (x - x_B).$$

Ex. Scrieți ecuația dreptei d știind că punctul $A(2,5)$ se găsește pe dreaptă și are direcția vectorului $\vec{u} = (3,4)$.

$$\mathbf{d}: y - 5 = \frac{4}{3} (x - 2) \Leftrightarrow 4x - y - 3 = 0$$

2. Ecuții ale dreptei în plan determinată de un punct și pantă

d - dreaptă, un punct $M_0(x_0, y_0) \in d$ și m panta dreptei.

Ne propunem sa găsim relația pe care trebuie să o îndeplinească coordonatele oricarui alt punct $M(x, y)$ astfel încât acesta să fie pe dreapta d .

Fie $M(x, y) \in d$.

În aceste condiții vom avea: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$. (1)

Deci, dreapta d este mulțimea punctelor $M(x, y)$ care satisfac relația $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Spunem ca dreapta **d are ecuația d** : $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Ex. Scrieți ecuația dreptei d știind că punctul $A(2,3)$ se găsește pe dreaptă și are panta 4.

d : $y - 3 = 4(x - 2) \Leftrightarrow 4x - y - 5 = 0$ (ec. carteziană).

1. Retinem ca $y = mx$ este ecuația unei drepte care trece prin origine.
2. Pentru $m = 1$ se obține $y = x$ care este ecuația primei bisectoare.
3. Pentru $m = -1$ se obține $y = -x$ ecuația celei de doua bisectoare.

3. Ecuații ale dreptei în plan determinată de două puncte.

Fie d : $y - y_0 = m(x - x_0)$. Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in d$.

Deci, panta dreptei ce trece prin punctele A, B va avea forma: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Înlocuind în ecuația dreptei (1) se va obține ecuația dreptei ce trece prin punctele A, B ca având forma:

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) \Leftrightarrow \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \text{ec. dreptei ce trece prin}$$

punctele A, B .

Ex. Scrieți ec. dreptei ce trece prin punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$

d : $y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = m(x - 2)$. Calculăm

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

Se obține ecuația dreptei: $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

Lungimea unui segment, mijlocul unui segment

1. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2,3)$ și $B(5,-1)$.
2. Să se calculeze distanța de la punctul $A(-6,8)$ la originea reperului cartezian xOy .

3. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-1,1)$ și $B(3,-2)$.
4. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB , știind că $A(5,-4)$ și $B(-3,6)$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(5,-2)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB .
6. Să se determine coordonatele punctului M care aparține dreptei AB și este egal depărtat de punctele $A(1,-1)$ și $B(5,-3)$.
7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(4,-3)$. Să se determine coordonatele punctului M , mijlocul segmentului AB .
8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ și $B(m^2-1,0)$, cu $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5,0)$ să fie mijlocul segmentului AB .
9. Să se determine coordonatele punctului C , simetricul punctului $A(5,4)$ față de punctul $B(-2,1)$.
10. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2,-4)$ față de punctul $B(1,-2)$.
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-1)$ și $B(3,1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul B .
12. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul M , mijlocul segmentului BC , știind că $A(3,0)$, $B(0,2)$ și $C(3,2)$.
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctul N , simetricul punctului $M(-2,3)$ față de punctul O . Să se calculeze lungimea segmentului MN .
14. Să se determine numerele reale a , știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ și $B(4-a, 4+a)$ este egală cu 5.
15. Să se determine distanța dintre punctele $A(3,-1)$ și $B(-1,2)$.
16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,2)$. Să se determine distanța dintre punctele A și B .
17. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,m)$, unde m este un număr real. Să se determine numerele reale m pentru care $OM = \sqrt{5}$.
18. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(-m,-2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.
19. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(1,5)$ și $C(4,2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC .
20. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ și $C(2,-1)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB .
21. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-4)$ și $B(0,8)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului AB .
22. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ și $C(3;-4)$. Să se determine lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul lui (BC) .

23. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(1,1)$ și $C(3,-1)$. Să se determine lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC .
24. Să se determine lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC , știind că vârfurile acestuia sunt $A(0,4)$, $B(-2,0)$ și $C(8,0)$.
25. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,2)$ și $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
26. Să se determine valorile reale ale numărului a , știind că distanța dintre punctele $A(2,1)$ și $B(7,a)$ este egală cu 13 .
27. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $x + 3y - 1 = 0$ și $3x + 2y + 4 = 0$.
28. Să se calculeze distanța de la $O(0,0)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x - y - 2 = 0$ și $d_2: x + 3y - 8 = 0$.
29. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2;0)$, $N(6;4)$, $P(4;6)$ și $Q(0;2)$ este dreptunghi.

Ecuția dreptei prin punct și pantă, ecuația dreptei prin două puncte

- Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ și are panta egală cu 1 .
- Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ și are panta egală cu 2 .
- Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(2,-1)$ și $B(1,-2)$.
- Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(2,-3)$ și $B(-3,2)$.
- Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(4,0)$ și $B(0,2)$.
- Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,1)$ și $B(1,-2)$.
- Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ și intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4 .
- În reperul cartezian xOy , se consideră punctele $A(3,2)$, $B(2,3)$ și M mijlocul segmentului AB . Să se determine ecuația dreptei OM .
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ și $N(2,1)$. Să se determine ecuația dreptei MN .
- Să se determine numărul real m pentru care punctul $A(2,3)$ se află pe dreapta $d: 2x - y + m = 0$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2, m)$ și dreapta de ecuație $d: x + y + m = 0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care punctul A aparține dreptei d .
- Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(a,b)$ și $B(a-1,4)$ aparțin dreptei de ecuație $x + y - 5 = 0$.
- Să se determine numerele reale m și n pentru care punctele $A(3,-1)$ și $B(1,1)$ se află pe dreapta de ecuație $x + my + n = 0$.

14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ și $C(3, m)$. Să se determine numărul real m pentru care punctele A , B și C sunt coliniare.
15. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ și $C(3,m)$ să fie coliniare.
16. Să se determine numărul real m pentru care punctele $A(2,4)$, $B(3,3)$ și $C(m,5)$ sunt coliniare.
17. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,a)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât dreapta AB să conțină punctul $O(0,0)$.
18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,6)$ și $C(-1,1)$. Să se determine ecuația medianeî duse din vârful C al triunghiului ABC .

Condiții de paralelism și perpendicularism.

1. Să se determine numărul real a , știind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
2. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(1,1)$ și este paralelă cu dreapta $4x + 2y + 5 = 0$.
3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-1, 1)$, $C(3,5)$ și $D(5,a)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a , știind că $AB \parallel CD$.
4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ și $D(2,3)$. Să se demonstreze că dreptele AB și CD sunt paralele.
5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : -2x - my + 3 = 0$ și $d_2 : mx + y - 5 = 0$ sunt paralele.
6. Se consideră dreptele distincte $d_1 : ax + 2y = 2$ și $d_2 : 8x + ay = 4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 și d_2 să fie paralele.
7. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2;5)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$
8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$, $B(2,3)$ și $C(3,1)$. Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.
9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ și $C(0, -2)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A .
10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB .
(Model, Bacalaureat, 2018)
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ și $B(8,0)$. Determinați lungimea medianeî din vârful O în triunghiul AOB .
(Bacalaureat, varianta 5, 2018)

12. Determinați parametrul real m , știind că $A(2, 2m-1)$ este situat pe dreapta de ecuație $x+y - 7=0$. *(Simulare, Decembrie, Iași, 2016)*
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$. Calculați lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC . *(Simulare, Martie, 2015)*
14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic. *(Bacalaureat, 2014)*

Cap. III. ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

3.1. Matrici

Operații cu matrici, puterile unei matrici (determinarea A^2, A^3)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculați $A + B; A - B; 2A + 3B; A \cdot B; A^2; B^2 - A$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculați $A + B; 2A + 3B; A \cdot B; A^2; B^2 - A$.

3. Să se rezolve ecuația matriceală $2X + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Să se rezolve ecuația matriceală $2X + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Să se determine $x, y \in R$ pentru care are loc :

$$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ 2x+1 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea B^2 , unde $B^2 = B \cdot B$.

b) Să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ și $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în

$M_2(R)$.

- a) Să se verifice că $AB = BA$.
- b) Să se calculeze $A^2 + B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$, și $B^2 = B \cdot B$.
- c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$ și $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.
8. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
- b) Să se verifice că $AB - 2B = O_2$.
- c) Să se determine matricele $X \in M_2(R)$ care verifică egalitatea $AXB = O_2$.

3.2. Determinanți

Calculul determinanților de ordin 2 și 3; proprietăți

1. Calculați determinanții de ordin 2: a) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}$.
2. Calculați determinanții de ordinul 3: a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 4 \end{vmatrix}$,
- c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.
3. Fie a și b soluțiile ecuației $x^2 + x - 2011 = 0$. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a+1 & 6b-1 \end{vmatrix}$.
4. Să se rezolve ecuațiile: a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
5. Să se scrie ecuația dreptei AB sub formă de determinant și sub formă carteziană generală, dacă:
a) A(1,3); B(-2,5); b) A(2,-3); B(-1,5); c) A(2,0); B(0,3).
6. Precizați care dintre punctele: A, B, C sunt coliniare, în cazurile:
a) A(-2,5), B(2,3), C(-1,4); b) A(1,1), B(3,3), C(5,5);

- c) A(-3,2), B(1,2), C(8,2); d) A(1,3), B(-2,0), C(2,4);
 e) A(-4,2), B(-2,1), C(3,0); f) A(1,-1), B(1,5), C(2,-3);
 g) A(1,2), B(2,3), C(5,5).
 7. Calculați aria triunghiului ABC, în cazurile: a) A(2,1), B(1,5), C(-2,4); b) A(1,1), B(2,2), C(3,4);
 c) A(3,2), B(6,4), C(9,10); d) A(2,-3), B(-1,0), C(3,1); e) A(6,3), B(2,1), C(-4,-2).

8. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze $\det(A)$.
 b) Să se demonstreze că $A^3 = 7A$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
 c) Să se demonstreze că $A \cdot B = A$, unde $B = A^2 - 6I_2$ și $A^2 = A \cdot A$.
 9. În mulțimea $M_2(R)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in R$.

- a) Să se demonstreze că $A^2 = 8A$.
 b) Să se calculeze $\det X(a)$.
 c) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 8ab)$, $\forall a, b \in R$.
 10. În mulțimea $M_2(R)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.
 b) Să se demonstreze că $A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.
 c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2 - 8A + 12I_2 = O_2$.

11. În mulțimea $M_3(R)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ și } C = A + B.$$

- a) Să se calculeze $\det(AB)$.

- b) Să se demonstreze că $A^2 = 6A$ și $B^2 = -6B$, unde $A^2 = A \cdot A$.
 c) Să se demonstreze că $C^3 = 6^2(A + B)$, unde $C^3 = C \cdot C \cdot C$.

3.3. Matrici inversabile

1. Se consideră matricile $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim

matricile $A = X \cdot Y^t$ și $B(a) = aA + I_3$, unde $a \in R$ și Y^t este transpusa matricii Y .

a) Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul matricii A .

c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, $\forall a \in R \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

2. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

din $M_3(R)$. Pentru $\forall X \in M_3(R)$ se notează cu $X^2 = X \cdot X$.

a) Să se verifice că $A = I_3 + B$.

b) Să se calculeze suma $A^2 + B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricii A^2 .

3. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in Z, a^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice dacă matricile $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

aparțin mulțimii G .

b) Să se determine matricea $B \in M_2(Z)$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB, \quad \forall a, b \in Z.$$

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G .

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

funcția $f: M_3(R) \rightarrow M_3(R)$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X \cdot X$.

a) Să se calculeze $\det(I_3 + B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A) = I_3 + B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.

5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = 2I_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se determine $x \in R$ astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.

c) Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuația $AX = XA$.

3.4. Sisteme de ecuații

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$
 unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in R$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

b) Să se determine $m \in R$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1; 2; -3)$.

c) Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$$
 unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in R$, astfel încât soluția sistemului să fie $(2; 1; -1)$.

b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

3.5. Legi de compoziție

Proprietățile legilor de compoziție, reguli de calcul

Parte stabilă: $(\forall) x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$

Asociativitate: $(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall) x, y, z \in G$

Comutativitate: $x * y = y * x$, $(\forall) x, y, z \in G$

Element neutru: $(\exists) e \in G$ așa încât $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in G$

Element simetrizabil: $(\exists) x' \in G$ așa încât $x * x' = x' * x = e$, pentru orice $x \in G$

Exerciții propuse spre rezolvare:

1. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Calculați $1 \circ (-4) \circ 3$ Știind că operația „ \circ ” este asociativă.

2) Să se verifice că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3) Determinați elementul neutru al legii " \circ " pentru orice $x \in (-4, +\infty)$.

4) Determinați elementul simetrizabil al legii " \circ " pentru orice $x \in (-4, +\infty)$.

5) Determinați simetricul elementului 7.

6) Să se calculeze $x \circ (-4)$.

7) Știind că operația „ \circ ” este asociativă, să se calculeze:

$(-20012) \circ (-2011) \circ \dots \circ 2011 \circ 2012$.

8) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 4$.

9) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

10) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in (-4, +\infty)$ rezultă că $x \circ y \in (-4, +\infty)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația pentru $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Calculați $2 \circ 3 \circ 4$ Știind că operația „ \circ ” este asociativă.

2) Să se verifice că $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3) Determinați elementul neutru al legii " \circ " pentru orice $x \in (3, +\infty)$.

4) Determinați elementul simetrizabil al legii " \circ " pentru orice $x \in (3, +\infty)$.

- 5) Determinați simetricul elementului 5.
- 6) Să se calculeze $x \circ 3$.
- 7) Știind că operația „ \circ ” este asociativă, să se calculeze: $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2012}$.
- 8) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x \circ x = 11$.
- 9) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in (3, +\infty)$ rezultă că $x \circ y \in (3, +\infty)$.

3.6. Clase de resturi

1. Să se calculeze suma elementelor mulțimilor: $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$.
2. Să se calculeze produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \hat{7}$ în $\mathbf{Z}_5, \mathbf{Z}_8$.
3. Să se rezolve ecuația $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$
4. Să se rezolve ecuația $\hat{x}^3 + \hat{x} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$,
5. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{Z}_3 \rightarrow \mathbf{Z}_3$, $f(x) = x^2 + x$ și $g(x) = x^2 + \hat{2}x + a$, unde $a \in \mathbf{Z}_3$.
 - a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$
 - b) Să se determine valorile lui x pentru care $f(x) = \hat{0}$
 - c) Să se arate că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru orice $a \in \mathbf{Z}_3$.

3.7. Inele de polinoame cu coeficienți întregi, raționali, reali

Forma algebrică a unui polinom.

1. Să se scrie sub formă algebrică polinomul: $f = (X-1)^2 + (3X-1)^2$, $f \in R[X]$.

Gradul unui polinom.

2. Să se determine în funcție de parametrul real m , gradul polinoamului $f \in R[X]$: $f = (m-1)X^3 + (m^2-1)X^2 - 3X + 1$

Egalitatea polinoamelor

3. Se consideră polinoamele: $f = (4a+b)X^3 + (a-b)X^2 + (c-3)$, $f \in R[X]$ și $g = (2a-b)X^3 - 2X^2 + (a-c)$, $g \in R[X]$. Să se determine $a, b, c \in R$ astfel încât $f = g$.

Valoarea numerică a unui polinom

4. Să se calculeze valoarea $f(\alpha)$ a polinomului f în cazurile:
 $f = 2X^3 - 4X^2 + X - 3$, $\alpha = 2$ și $\alpha = 1$

5. Fie polinomul $f \in Z_6[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{3}$. Calculați produsul $f(\hat{0}) \cdot f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot f(\hat{3}) \cdot f(\hat{4}) \cdot f(\hat{5})$.

6. Fie polinomul $f \in Z_5[X]$, $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}X$. Să se calculeze în Z_5 suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.

7. Se consideră polinomul $f \in R[X]$, $f = X^3 - X^2 + aX + b$. Să se determine a, b știind că $f(1) = 0$ și $f(-1) = -4$.

8. Să se determine polinomul $f \in R[X]$, $\text{grad } f = 1$, știind că:
 $f(-1) = 8$, $f(2) = -1$.

9. Să se determine polinomul $f \in R[X]$, $\text{grad } f = 2$, știind că: $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Adunarea, scăderea a două polinoame. Înmulțirea cu un scalar a unui polinom. Înmulțirea a două polinoame.

10. Se consideră polinoamele $f, g \in Z_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ și $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

Împărțirea polinoamelor. Teorema împărțirii cu rest a polinoamelor

11. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g în cazurile:

a) $f = X^4 - 2X^3 + 4X - 3$, $g = X - 2$

b) $f = X^4 + 4X^3 - 9X - 7$, $g = X - 1$

c) $f = X^4 + 8X^3 - 4X - 1$, $g = X + 3$

d) $f = X^4 + 7X^3 - 9X + 4$, $g = X + 1$

e) $f = 2X^4 - 2X^3 + X - 1$, $g = 2X - 1$

f) $f = X^4 + 8X^2 - 6X + 3, g = X + 2$.

12. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $g, f, g \in R[X]$, în cazurile:

a) $f = X^3 - 2X^2 + 4X - 3, g = X + 2$

b) $f = X^4 + X^2 + 4X^2 - 9X - 7, g = X^2 - X - 1$

c) $f = X^3 + 3X^2 - 4X - 1, g = X^2 - 2X + 3$

d) $f = X^4 + 8X^2 - 6X + 3, g = X^2 + 3X + 2$

f) $f = X^3 + 7X^2 - 5X + 4, g = X^2 - 4X + 1$

13. Calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la g în următoarele cazuri:

a) $f = \hat{2}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X + \hat{1}$ și $g = \hat{4}X^3 + X^2 + \hat{2}, f, g \in Z_5[X]$

b) $f = \hat{3}X^4 + \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{3}$ și $g = \hat{2}X^2 + X + \hat{2}, f, g \in Z_4[X]$

14. Determinați m , număr real, astfel încât polinomul $f \in R[X], f = X^4 + mX^3 - 2X^2 + (m+1)X + m - 1$ să dea restul 5 la împărțirea cu $X-2$.

15. Fie polinoamele $f, g \in Z_7[X], f = \hat{6}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{5}X^2 + mX + n$ și $g = \hat{5}X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$. Să se determine parametrii $m, n \in Z_7$ astfel încât prin împărțirea polinomului f la polinomul g să se obțină restul $r = \hat{2}X + \hat{3}$.

16. Să se determine polinomul cu coeficienți raționali, de grad minim, care împărțit la $X^2 + X - 2$ dă restul $2X + 13$ și împărțit la $X^2 - X + 2$ dă restul $2X - 3$

17. Determinați $a, b \in Q$ astfel încât polinomul $f = X^4 - 3X^3 + aX + b$ împărțit la polinomul $g = X^2 - 5X + 4$ să dea restul $r = 5X + 13$.

18. Fie polinoamele $f, g \in R[X], f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 6X - 4$ și $g = X^2 - X - 2, a, b \in R$. Să se determine a și b astfel încât polinomul f împărțit la polinomul g să dea restul zero.

19. Fie polinoamele $f, g \in R[X], f = X^{100} + 3X^{98} - X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - 1$. Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

20. Un polinom $f \in Z_7[X]$ împărțit la polinomul $g = X^2 + \hat{3}$ dă restul $r = \hat{3}X + \hat{4}$. Calculați $f(\hat{2})$.

21. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in R$.

a) Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+1 .

b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X , iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1 .

22. Se consideră polinomul $f \in R[X]$, $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$, care are forma algebrică

$$f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + \dots + a_1X + a_0, \quad \text{unde}$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{2008} \in R$$

a) Să se calculeze $f(-1)+f(1)$.

b) Să se determine suma coeficienților polinomului f .

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la X^2-1 .

23. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$ unde $a, b, c \in R$.

a) Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+1 .

b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X , iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1 .

Împărțirea polinoamelor. Schema lui Horner

24. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ prin binomul $X-2$.

25. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^{2012} + (X-1)^{2012}$ și $g = X+1$. Polinomul f are forma algebrică $f = a_{2012}X^{2012} + a_{2011}X^{2011} + \dots + a_1X + a_0$, cu

$$a_0, a_1, \dots, a_{2012} \in R.$$

a) Să se determine a_0

b) Să se calculeze restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .

Rădăcina unui polinom.

26. Să se determine $m \in R$ pentru care polinomul

$$f = mX^3 - 3X^2 + 2X + m - 3 \text{ are rădăcina } 2.$$

27. Se consideră polinomul $f \in R[X]$, $f = X^4 + mX^2 + n$, unde

$m, n \in R$. Să se determine $m, n \in R$ știind că polinomul f admite

rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

28. În mulțimea $R[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și

$$g = X^2 - X - 1.$$

- a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g , atunci $y^3 = 2y + 1$.
 c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g , atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bezout

29. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu $f \in R[X]$. Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.
 30. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 6X - 4$ cu $f \in R[X]$. Arătați că $f : (X - 1)$.
 31. Determinați m , număr real, astfel încât polinomul $f \in R[X]$, $f = X^3 + (2m - 1)X^2 - (m + 1)X + 3m + 1$ să fie divizibil cu $X + 3$.
 32. Să se determine $m \in R$ pentru care polinomul $f = X^3 - (m + 2)X^2 + (2m - 3)X + 1$ se divide prin $X - 1$.
 33. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in Z$.
 a) Să se determine a știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f .
 b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
 34. Se consideră polinoamele $f, g \in R[X]$, $f = (X - 1)^{10} + (X - 2)^{10}$ și $g = X^2 - 3X + 2$.
 a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $R[X]$.
 b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g .
 c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

35. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.
 a) Să se determine $a, b \in Q$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .
 b) Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $Q[X]$.
 c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.
 36. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienți reali.

- a) Să se determine $m \in R$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.
- b) Pentru $m = -9$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $R[X]$.
37. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35 \in R[X]$.
- a) Să se arate că $f = (X^2 - 6)^2 - 1$.
- b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.
- c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $R[X]$.

Relațiile lui Viete

1. Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f \in R[X]$ în cazurile:
- a) $f = X^3 + 2X + 3$ b) $f = X^3 + X + 1$ c) $f = X^4 - 3X^3 + 4X + 5$
- d) $f = 3X^4 - 9X^3 + 6X^2 - 5X + 7$ e) $f = 2X^3 - 4X^2 + 3X$.
2. Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f \in R[X]$ în cazurile:
- a) $f = X^4 - 4X^2 + 7$ b) $f = X^3 + 75 - 3X + 4$ c) $f = X^3 - 7X^2 + X - 6$
- d) $f = 2X^3 - 4X^2 + X - 6$ e) $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$
3. Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f \in R[X]$ în cazurile:
- a) $f = 2X^3 - 4X^2 + 3X$ b) $f = 2X^3 - 4X^2 + X$ c) $f = X^3 - X^2$
- d) $f = X^3 + 2X + 3$.
4. Să se determine $m \in R$ pentru care rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - X - 3$ sunt în progresie aritmetică.
5. Să se determine $m \in R$ pentru care rădăcinile polinomului $f = X^3 - 9X^2 + 18X - m + 1$ sunt în progresie geometrică.
6. Să se determine $m \in R$ pentru care polinomul $f = X^3 + X^2 - mX + 3$ admite o rădăcină dublă.
7. Fie polinomul $f = X^3 - X^2 + mX - 1$. Să se determine $m \in R$ pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3 verifică relația $x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2}$.
8. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$.
- a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
- b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.
- c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.

9. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienți reali. Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f .

10. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f .
 b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

11. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , unde $a, b \in \mathbb{R}$

a) Pentru $a = 1$ și $b = 0$ să se determine x_1, x_2, x_3 .
 b) Știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că $a = 1$.
 c) Știind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, să se determine numerele reale a și b .

12. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 4X + 4$.

a) Arătați că $f(-1) = 0$.
 b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X + 2$.
 c) Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -\frac{3}{4}$, x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Model, Bacalaureat, 2016

13. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.

a) Arătați că $f(1) = -2$.
 b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.
 c) Demonstrați că $(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = -3$, x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Bacalaureat, 2016, varianta 8

14. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 - 4$.

a) Arătați că $f(1) = 2$.
 b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.
 c) Demonstrați că $\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_1}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} = -3$, x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Bacalaureat, 2016, varianta 9

15. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 6X + 8$.

a) Arătați că $f(2) = -8$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

c) Demonstrați că $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 = 30$, x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Model, Bacalaureat, 2017

16. Se consideră polinomul $f = 2X^3 + 3X^2 - X - 2$.

a) Arătați că $f(1) = 2$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c) Determinați rădăcinile polinomului f .

Bacalaureat, 2017, varianta 9

Cap. IV. ELEMENTE DE ANALIZĂ

4.1. Limitele funcțiilor elementare, operații cu limite

1. Determinați limitele funcțiilor următoare:

$$\begin{aligned}
 & 2) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 4x + 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 4x + 1) \\
 & 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 - x + 3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{-5x + 4} \\
 & 4) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-2x^3 + x - 1} \\
 & 5) \lim_{x \rightarrow 3} 5^x \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{7}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} \\
 & 6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \lg x \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_{\frac{1}{3}} x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} x \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_5 x \\
 & 7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x \quad \lim_{x \rightarrow -1} \arcsin x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arccos x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos x \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x \\
 & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{3x} \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 4x)^2 - 1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x} \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x
 \end{aligned}$$

2. Determinați limitele funcțiilor următoare:

$$\begin{aligned}
 & 1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5^x + \ln x); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 6}{5x^2 - x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \\
 & 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{1 + 4^x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x)(\cos x); \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^x}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^x};
 \end{aligned}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{3x}{2x+1}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + x}} \right)^{x+1}.$$

3. Calculați limitele următoarelor funcții

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^2 + 3x - 5}{4x^2 - 1}; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x-1|}; \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}; \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{\ln(x^4 + 2x)}; \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{\ln(e^x + 1)};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}; \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x^2 + 3};$$

4.2. Asimptote

1. Determinați asimptotele următoarelor funcții, în prealabil stabilind și domeniul maxim de definiție a funcțiilor :

$$1). f: D \rightarrow R, f(x) = \frac{|x-3|}{x}; \quad 2). f: D \rightarrow R, f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$3). f: (-1; \infty) \rightarrow R, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3x + 2}; \quad 4). f: D \rightarrow R, f(x) = \frac{x \cdot |x|}{x-2}$$

$$5). f: D \rightarrow R, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x-4}; \quad 6). f(x) = x - \sqrt{x^2 - x};$$

$$7). f: (0; \infty) \rightarrow R, f(x) = \ln \frac{x}{x+e} \text{ (determinați A.O. la } +\infty)$$

4.3. Derivabilitate, derivatele funcțiilor elementare, operații

de derivare

Cadru teoretic

Definiție: Fie $f: D \rightarrow R$, $x_0 \in D$, D este un interval sau o reuniune de intervale.

1. Funcția f admite derivată în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în \overline{R} .

2) Se spune că f este derivabilă în x_0 dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în \mathbb{R} (există și este finită) și o notăm cu $f'(x_0)$.

Definiție: Se spune că funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe D dacă este derivabilă în fiecare punct $x \in D$.

Derivatele funcțiilor elementare

FUNCȚIA	DERIVATA	DOMENIUL DE DERIVABILITATE	FUNCȚIA COMPUSĂ	DERIVATA
c (const.)	0	\mathbb{R}		
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	\mathbb{R}	u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{u}$ ($u \neq 0$)	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0; \infty)$	\sqrt{u} ($u > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	\mathbb{R}	e^u	$e^u \cdot u'$
$a^x, 0 < a \neq 1$	$a^x \ln a$	\mathbb{R}	a^u	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0; \infty)$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0; \infty)$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$	$\operatorname{tg} u$ ($\cos u \neq 0$)	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$	$\operatorname{ctg} u$ ($\sin u \neq 0$)	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$

arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1;1)	arcsin u (u ≤ 1)	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1;1)	arccos u (u ≤ 1)	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathfrak{R}	arctg u	$\frac{u'}{1+u^2}$

Operații cu funcții derivabile

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe D , atunci:

a) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$ b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

c) $(c \cdot g)'(x) = c \cdot g'(x)$, $(\forall) c \in \mathbb{R}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left[\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}\right]$ ($g(x) \neq 0$)

Exerciții propuse spre rezolvare:

Să se determine derivatele de ordin întâi pentru funcțiile $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

1) a) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

2) a) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = x + \sin x$

c) $f(x) = x - \cos x$

d) $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} x$

f) $f(x) = x^2 - \operatorname{arctg} x$

3) a) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

c) $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x$

4) a) $f(x) = (x^2 - x) \cdot \ln x$

b) $f(x) = (x^2 - x) \cdot \ln x$

c) $f(x) = x \cdot \ln x$

5) a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin x$

c) $f(x) = (1 - x^2) \cdot \cos x$

6) a) $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

7) a) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+4}$

d) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}$

8) a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

9) a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+2}$

Cadru teoretic

Ecuatia tangentei în punctul $A(x_0, f(x_0))$ la G_f

Definitie: Fie $f : [a, b] \rightarrow R, a < b$ o funcție continuă,

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in [a, b]\}$$

Ecuatia tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ la curbă este dreapta de ecuație

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemplu. Fie $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 3x$ și $x_0 = 4$.

Verificăm dacă funcția f admite tangentă în punctul x_0 și în caz afirmativ determinăm ecuația tangentei.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 1) = 5$$

Deci, funcția f admite tangentă la G_f în punctul $x_0 = 4$ (limita raportului este finită).

b) Determinăm ecuația tangentei în punctul $x_0 = 4$.

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$m = 5$ (de la punctul a)) și $f(4) = 4$.

Deci ecuația este $y - 4 = 5(x - 4)$

sau $y = 5x - 16$ sau $5x - y - 16 = 0$.

Exerciții propuse spre rezolvare:

1. Să se determine ecuația tangentei la G_f în punctul specificat pentru următoarele funcții $f : D \rightarrow R$:

$$a). f(x) = 3x^2 - 4x; x_0 = 2 \quad b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x, & x \leq 0 \\ 5x^2 - 3x, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0 \text{ și } x_1 = 2$$

$$c) f(x) = (x + 1) \cdot e^x, x_0 = 1 \quad d) f(x) = x \cdot \ln x, x_0 = e$$

$$e) f(x) = \frac{x + 2}{x + 4}, x_0 = 1$$

2. Fie funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 1$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Derivarea funcțiilor compuse

Teoremă: Fie I, J intervale și $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow R$ două funcții. Dacă f este derivabilă pe I și g este derivabilă pe J , atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I și $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$

Exemple rezolvate

$$1) \left[(x^2 + 3)^2 \right]' = 2 \cdot (x^2 + 3)^{2-1} \cdot (x^2 + 3)' = 2 \cdot (x^2 + 3) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2 + 3)$$

$$2) [\ln(2x + 1)]' = \frac{1}{2x + 1} \cdot (2x + 1)' = \frac{1}{2x + 1} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 1}$$

Exerciții propuse. Derivați următoarele funcții:

$$1) f(x) = \sqrt{x + 3} \quad 2) f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} \quad 3) f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x + 4}}$$

$$4) f(x) = \ln(x + 3) \quad 5) f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad 6) f(x) = e^{x^2}$$

$$7) f(x) = \sin(x^2 - 1)$$

Derivata de ordinul al doilea

Exemple rezolvate. Calculați derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții

$$1) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

Calculăm derivata de ordinul întâi :

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 2x + 4)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 3x^2 + 6x - 2$$

Calculăm derivata de ordinul al doilea :

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 6x - 2)' = 3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 = 6x + 6$$

Exerciții propuse. Calculați derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

$$1) \text{ a) } f(x) = 2x^2 - 7x + 1 \quad \text{b) } f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

$$\text{c) } f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 9$$

$$2) \text{ a) } f(x) = x + \sin x \quad \text{b) } f(x) = x - \cos x$$

$$3) \text{ a) } f(x) = (x + 1) \cdot e^x \quad \text{b) } f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$4) \text{ a) } f(x) = (x^2 - x) \cdot \ln x \quad \text{b) } f(x) = x \cdot \ln x$$

$$5) \text{ a) } f(x) = \frac{x + 2}{x + 4} \quad \text{b) } f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

4.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatei întâi și doi

Rolul derivatei I în studiul funcțiilor (puncte de extrem, monotonia funcțiilor)

Utilizând monotonia unei funcții, putem stabili punctele de minim sau maxim local pentru o funcție derivabilă. Un punct x_0 din interiorul domeniului de definiție I (I un interval din \mathbb{R}) este un punct de minim local dacă avem situația marcată în tabelul următor:

x	x₀	
f'(x)	-----	0 ++++++
f(x)	↓	f(x₀) ↑

Dacă avem situația din tabelul de mai jos, punctul x_0 din interiorul domeniului de definiție I (I un interval din \mathbb{R}) este de maxim local:

x	x₀	
f'(x)	+++++	0 -----
f(x)	↑	f(x₀) ↓

Exemple rezolvate

I) Stabiliți intervalele de monotonie pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2$.

Avem $f'(x) = 3x^2 + 2x$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2/3, x_2 = 0$ (puncte critice ale lui f).

Se concepe un tabel de semn, din care se obține: f este strict crescătoare pe

$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup [0, +\infty)$ și strict descrescătoare pe $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$.

x	$-\infty$	$-2/3$	0	$+\infty$
f'(x)	++++	0	----	0 +++++
f(x)	$-\infty$ ↑	$4/27$	↓	0 ↑ $+\infty$

II) Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R}/\{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Avem $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$ (puncte critice ale lui f).

Se concepe un tabel de semn, din care se obține: f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'(x)	++++	0	----	/ ----	0 +++++
f(x)	$-\infty$ ↑	-4	↓	/ ↓	0 ↑ $+\infty$

III) Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Avem $f'(x) = \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

(punct critic al lui f).

Se concepe un tabel de semn, din care se obține: f este strict crescătoare pe $(0, e]$ și strict descrescătoare pe $(e, +\infty)$.

x	0	e	$+\infty$
f'(x)	++++	0	----
f(x)	↑	1/e	↓

Exerciții propuse

I. Aflați intervalele de monotonie, punctele de extrem și să se completeze tabelul de variație al funcției:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^4 - x^2$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$.

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

4) $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$

Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor

(concavitate, convexitate, puncte de inflexiune)

O funcție derivabilă de două ori este convexă sau concavă pe aceleași intervale pe care derivata a doua păstrează semn constant.

Exerciții rezolvate

I) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$.

Avem $f''(x) = 6x + 2$. Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = -1/3$. Se întocmește

tabelul de semn pentru f'' , care are forma:

x	$-\infty$	$-1/3$	$+\infty$
f''(x)	----	0	++++
f(x)	∩	2/27	∪

Deci f este concavă pe $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ și convexă pe $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

III) Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Avem că: $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, $f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e\sqrt{e}$.

x	0	$e\sqrt{e}$	+ ∞
f''(x)	----	0	++++
f(x)	∩	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	∪

Deci f este concavă pe $(0, e\sqrt{e}]$ și convexă pe $[e\sqrt{e}, +\infty)$.

Exerciții propuse

I. Aflați intervalele de convexitate / concavitate, punctele de inflexiune și să se completeze tabelul de convexitate al funcției:

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^4 - x^2$. 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$.
 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$. 4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 5) $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$

4.5. Primitive uzuale

Cadru teoretic

Definiție 1. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este un interval. **Funcția f admite primitive pe D** dacă există funcția $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- a) F este derivabilă pe D b) $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in D$.

Primitiva generală sau **integrala nedefinită** sau **antiderivata** unei funcții f este dată prin:

$$\int f(x)dx = \left\{ F + c \mid F: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ primitiva a lui } f; c \in \mathbb{R} \right\} = F(x) + C, (\forall)x \in D$$

OBSERVAȚII

- Orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.
- Orice funcție care admite primitive pe un interval are PROPRIETATEA LUI DARBOUX pe acel interval

Exerciții propuse

- 1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x}}$

a) Determinați primitiva $G:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, a funcției $g:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot f(x)}{x}$, al cărei grafic conține punctul $M(1,2)$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$, unde F este o primitivă a funcției f .

(Simulare, Decembrie 2017, Iași, profil tehnologic)

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.

Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=0$.

(Simulare, Martie 2018, Iași, profil tehnologic)

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x+2$.

a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe mulțimea \mathbb{R} .

b) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + e^x$ este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .

(Simulare, Ianuarie 2017, Hunedoara, profil tehnologic)

4. Se consideră funcțiile $f:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $F:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot \ln x$. Arătați că F este o primitivă a funcției f .

(Simulare, Martie 2017, Iași, profil tehnologic)

5. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}$ și $g(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$.

Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(0)=1$.

(Simulare, Decembrie 2015, Iași, profil tehnologic)

6. Se consideră funcțiile $f, g:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x \cdot (1 + e^x)$ și

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + e^x \cdot (x - 1).$$

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $(0, +\infty)$.

b) Să se arate că g este o primitivă a funcției f .

(Simulare, Decembrie 2015, Hunedoara, profil tehnologic)

7. Se consideră funcțiile $f, g:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt[5]{x} + 5}{5x}$.

a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .

b) Determinați primitiva $G:(0, +\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ a funcției g cu proprietatea că $G(1) = -1$.

(Simulare, Decembrie 2014, Iași, profil tehnologic)

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, & x < 1 \\ \ln x & , x \geq 1 \end{cases}$.

a) Demonstrați că f admite primitive pe mulțimea \mathbb{R} .

b) Arătați că $(x^2 + 4) \cdot f'(x) - 2x \cdot f(x) = 4x^2 + 2x - 16$, pentru orice $x \in (-\infty, 1)$.

(Simulare, Decembrie 2013, Iași, profil tehnologic)

9. Fie funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot e^x$. Demonstrați că orice primitivă a funcției f_{2014} este funcție crescătoare pe mulțimea \mathbb{R} .

(Simulare, Decembrie 2013, Iași, profil tehnologic)

10. Calculați:

a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$.

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x) dx$

c) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Să se determine

$\int f(x) dx$, unde $x > 0$.

d) Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Să se

calculeze $\int (x+1) \cdot f(x) dx$, unde $x \in [0, 1]$.

4.6. Integrala definită

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = e(e-1)$.

b) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 0$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} e^a$.

Simulare 2018, Martie

2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \ln x$.

a) Calculați $\int_1^e (f(x) - \ln x) dx$.

b) Arătați că F este o primitivă a funcției f .

c) Arătați că $\int_1^e f(x)F(x)dx = \frac{e^2}{2}$.

Simulare 2017, Martie

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Calculați $\int_0^2 (f(x) + 3x^2 - 2) dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 3x^2 + x)e^x dx = 2e - 1$

c) Demonstrați că $\int_{1-a}^{1+a} f(x) dx = 0$, pentru orice număr real a .

Simulare 2016, Martie

4.7. Aplicații ale integralei definite

1. Să se calculeze aria suprafeței mărginită de funcțiile, axa Ox și dreptele de ecuații specificate:

a) $f(x) = 2x + 2$, $x = -1$, $x = 4$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x = 1$, $x = 2$

2. Să se calculeze volumul corpului obținut la rotirea în jurul axei Ox a figurii plane mărginită de funcțiile:

a) $f(x) = 4 - 2x$, $x = 0$, $x = 2$;

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x = 1$, $x = 3$

3. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1 + \ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = 11$.

b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3e^2 + 4e - 4}{2}$.

c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a$ are aria egală cu $a^3 + a^2 + a - 2$.

Bacalaureat 2018

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (e^x + 1)f(x) dx = 1$.

b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{3}{2}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{e^x f(x)}$.

Bacalaureat, Model, 2018

Cap. V. VARIANTE

5.1. Variante de tip simulare, sesiunea decembrie, conform programei, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019, proba de matematică

Simulare, Decembrie 2017, Iași, profil tehnologic

SUBIECT I

1. Determinați numărul natural x știind că numerele -3 , x^2 , $x + 4$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m^2$. Determinați numărul real pozitiv m , știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției f .
3. Determinați soluțiile reale ale ecuației:
 $\log_3(x+1) - \log_3(x+3) = -1$.
4. Determinați prețul inițial al unui obiect știind că după o ieftinire cu 10% acesta costă 315 lei.
5. Calculați modulul vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, știind că $A(1,2)$ și $B(3,-5)$.
6. Calculați $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECT II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.
 - a) Arătați că $A^2 = 3A$.
 - b) Determinați numerele întregi x și y pentru care are loc egalitatea $AB = BA$.
 - c) Determinați perechile de numere întregi (x, y) pentru care $\det B = 2$.
2. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = (x+7)(y+7) - 7$.
 - a) Demonstrați că legea "*" este asociativă.
 - b) Știind că elementul neutru al legii "*" este $e = -6$, determinați mulțimea elementelor simetrizabile ale lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție "*".
 - c) Determinați toate perechile de numere întregi (a, b) , cu $a < b$, știind că $a * b = 4$.

SUBIECT III

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

a) Demonstrați că $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot e^x$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{f(x)}{e^x}}$.

c) Demonstrați că $1 \leq f(x) \leq 2e$, $(\forall)x \in [0, 1]$

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x}}$

a) Determinați $\int (\sqrt{x} f(x) - 1) dx$.

b) Determinați primitiva $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot f(x)}{x}$, al cărei grafic conține punctul $M(1, 2)$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$, unde F este o primitivă a funcției f .

Simulare, Decembrie 2015, Iași, profil tehnologic

SUBIECT I

1. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 8$ și $b = \sqrt{16}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 4$. Calculați $(f \circ g)(2)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4} = 2$.

4. Calculați numărul submulțimilor de 2 elemente ale mulțimii $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

5. Determinați parametrul real m , știind că $A(2, 2m - 1)$ este situat pe dreapta de ecuație $x + y - 7 = 0$.

6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = 5$, $AC = 5$ și $BC = 6$. Calculați $\cos B$.

SUBIECT II

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Arătați că $2 \circ (-3) = 2$.

b) Arătați că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

2. Fie Z_6 mulțimea claselor de resturi modulo 6.
- Calculați suma tuturor elementelor sale.
 - Calculați produsul tuturor elementelor sale.
 - Rezolvați în Z_6 ecuația $x + \hat{5} = \hat{1}$.

SUBIECT III

1. Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = 4x^3 + 3x^2$.
- Calculați $\int f(x) dx$.
 - Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2015$.
 - Calculați $\int (f(x) - 2x) dx$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}$ și $g(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$.
- Calculați $\int (x^2 + 4)g(x) dx$.
 - Arătați că $\int (f + g)(x) dx = x + C$.
 - Determinați primitiva $F: R \rightarrow R$ a funcției f pentru care $F(0) = 1$.

5.2. Variante de tip simulare, sesiunea martie, conform programei, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019, proba de matematică

Simulare, Martie 2018, profil tehnologic

SUBIECT I

- Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_4 = 24$.
- Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, 2)$ aparține graficului funcției $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 2x + 3$.
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = \log_3 8$.
- Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 7.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ și $C(7, 10)$. Arătați că $AC = 2AB$.
- Calculați aria triunghiului MNP , știind că $MN = 4$ și $m(\hat{N}) = m(\hat{P}) = 75^\circ$.

SUBIECT II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $5A - 3B = 8 \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că matricea B este inversa matricei A .

c) Determinați numerele reale x și y , știind că $xA \cdot A - 8A = yI_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Demonstrați că $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .

b) Determinați numărul real x , pentru care $x * 3 = 2018$.

c) Calculați $\log_2 2 * \log_2 3 * \log_2 4 * \dots * \log_2 2018$.

SUBIECT III

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 6x + 10$.

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 0$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .

c) Demonstrați că $f(0,9) + f(1,1) \geq 10$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = e(e-1)$.

b) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a funcției f pentru care $F(1) = 0$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} e^a$.

Simulare, Martie 2017, profil tehnologic

SUBIECT I

1. Arătați că $(2 + \sqrt{3})^2 + (1 - 2\sqrt{3})^2 = 20$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$. calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x = 4^{2x+1}$.

4. După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$, $B(1,1)$ și $C(5,5)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
6. Arătați că $\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \cos 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$.

SUBIECT II

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- a) Arătați că $\det(A(3)) = 3$.
- b) Arătați că $A(2017+x) + A(2017-x) = 2A(2017)$, pentru orice număr real x .
- c) Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(2) + mA(1)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.
- a) Arătați că $x * y = 2(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- b) Arătați că $7 * 98 = 2017$.
- c) Determinați numerele reale x , pentru care $x * (x+2) = 3$.

SUBIECT III

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.
- a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 0$.
- b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(2, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot \ln x$.
- a) Calculați $\int_1^e (f(x) - \ln x) dx$.
- b) Arătați că F este o primitivă a funcției f .
- c) Arătați că $\int_1^e f(x)F(x) dx = \frac{e^2}{2}$.

**5.3. Variante de bacalaureat conform modelului propus de
M.E.N.
în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019,
proba de matematică**

Varianta 2, Bacalaureat 2018, profil tehnologic

SUBIECT I

1. Arătați că $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) = 1$.
2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - x + a = 0$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1 x_2 - 1 < 0$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = 9^x$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$ și $B(4, 4)$. Demonstrați că punctele A, O și B sunt coliniare.
6. Demonstrați că $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECT II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $\det A = 16$.
 - b) Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B = aI_2$.
 - c) Demonstrați că $\det \left(xA + \frac{1}{x}B \right) \geq 49$, pentru orice număr real nenul x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + 15(x+y) + 42$.
 - a) Arătați că $(-2) \circ (-2) = 2$.
 - b) Demonstrați că $x \circ y = 5(x+3)(y+3) - 3$ pentru orice numere reale x și y .
 - c) Determinați numărul real x , pentru care $(x-3) \circ (x-3) \circ (x-3) = 197$.

SUBIECT III

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$.
 - a) Arătați că $f'(x) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

c) Demonstrați că $-e \leq f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 1) dx = 2$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .

c) Calculați $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

Varianta 3, Bacalaureat 2018, profil tehnologic

SUBIECT I

1. Arătați că $\sqrt{3}(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{6}) = 0$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$. Determinați numerele reale a , știind că $f(a) = a$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7x-5} = 4^x$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice relația $2^n \leq 16$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 2)$, $N(4, 3)$ și $P(6, 1)$. Determinați lungimea segmentului MQ , unde Q este mijlocul segmentului NP .

6. Arătați că $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \cos 60^\circ - \cos 45^\circ = 0$.

SUBIECT II

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2)) = 5$.

b) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x) \cdot A(y) = 3I_2$.

c) Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - (x + y) + 2$.

a) Arătați că $2 * 2 = 2$.

b) Demonstrați că $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$ pentru orice numere reale x și y .

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2018$.

SUBIECT III

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției.

c) Demonstrați că $1 \leq f(x) + f(y) \leq 3$, pentru orice numere reale x și y .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3) dx = 9$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe \mathbb{R} .

c) Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x) + 12} dx = \frac{\pi}{8}$.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Burtea, - "*Matematică, manual pentru cl. aIXa*", Trunchi
G. Burtea comun și curriculum diferențiat, Ed.Carminis,
Pitești, 2004
2. M. Burtea, - "*Matematică, manual pentru cl. aXa*", Trunchi
G. Burtea comun și curriculum diferențiat, Ed.Carminis,
Pitești, 2005
3. M. Burtea, - "*Matematică, manual pentru cl. aXIa*", M2,
G. Burtea filieră teoretică, specializarea științele naturii
(TC+CD), filieră tehnologică (TC) (3 ore/săpt), Ed.
Prior&Books Educațional, București, 2011
4. M. Ganga - "*Matematică, manual pentru cl. aXIIa*",
Tr.com+CD (4 ore/săpt), Ed. MathPress, Ploiești,
2006
5. www.subiecte.edu.ro
6. www.geogebra.org/cms/

Notății

\mathbb{R} mulțimea numerelor reale

\subseteq relația de incluziune între mulțimi

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$$

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$$

$$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$$

CUPRINS

Prefață	5
Test inițial. Identificarea nevoilor grupului țintă	7
CAP. I. ALGEBRĂ	9
1.1. Mulțimea numerelor reale	9
1.2. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	10
1.3. Funcția de gradul I	11
1.4. Funcția de gradul al II-lea	12
1.5. Ecuații, inecuații, sisteme de două ecuații cu două necunoscute	14
1.6. Puteri și radicali. Ecuații iraționale	14
1.7. Calcule cu logaritmi	15
1.8. Ecuații exponențiale. Ecuații logaritmice	15
1.9. Elemente de combinatorică - metode de numărare	16
CAP. II. GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE	19
2.1. Vectori	19
2.2. Trigonometrie	20
2.3. Aplicații ale trigonometriei în geometria plană	21
2.4. Elemente de geometrie analitică	23
CAP. III. ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ	29
3.1. Matrici	29
3.2. Determinanți	30
3.3. Matrici inversabile	32
3.4. Sisteme de ecuații	33
3.5. Legi de compoziție	34
3.6. Clase de resturi	35

3.7.	Inele de polinoame cu coeficienți întregi, raționali, reali	35
CAP. IV. ELEMENTE DE ANALIZĂ		43
4.1.	Limitele funcțiilor elementare, operații cu limite	43
4.2.	Asimptote	44
4.3.	Derivabilitate, derivatele funcțiilor elementare, operații de derivare	44
4.4.	Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatei întâi și doi	49
4.5.	Primitive uzuale	51
4.6.	Integrala definită	53
4.7.	Aplicații ale integralei definite	54
CAP. V. VARIANTE		56
5.1.	Variante de tip simulare, sesiunea decembrie, conform programei, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019, proba de matematică	56
5.2.	Variante de tip simulare, sesiunea martie, conform programei, în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019, proba de matematică	58
5.3.	Variante de bacalaureat conform modelului propus de M.E.N. în vederea susținerii examenului de Bacalaureat 2019, proba de matematică	61
Bibliografie		65
Cuprins		67