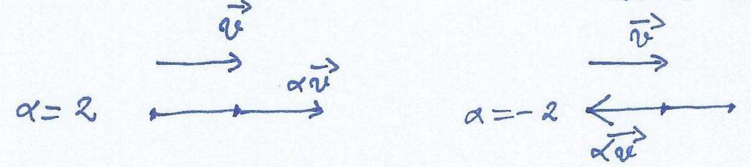
Înmulțirea vectorilor cu scalari

$\vec{v}$ - vector ; $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Vectorul $\alpha\vec{v}$ - vector cu aceeași direcție cu $\vec{v}$ și $|\alpha\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$

același sens cu $\vec{v}$ pt. $\boxed{\alpha > 0}$

sens contrar lui $\vec{v}$ pt. $\boxed{\alpha < 0}$



$\alpha = 0 \Rightarrow$ vector nul.

Proprietăți: 1) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

2) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

3) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Obs.: $\vec{v}$ și $\alpha\vec{v}$ sunt vectori coliniari

T) Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ - coliniari $\Leftrightarrow (\exists)\, \alpha \in \mathbb{R} : \vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Obs.: Punctele A, B, C - coliniare dacă vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{BC}$ - coliniari

($(\exists)\, \alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{BC}$)

Ex_1) M-mijl. [AB]

↳ $\vec{AM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM}, \vec{AB}$ - vectori coliniari

Descompunerea unui vector după doi vectori dați.

$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*)$.

Ex: reg. triunghiului; reg. paralelogramului.

Ex_1) $\vec{AB} = \vec{a}$ și $\vec{AC} = \vec{b}$.

Scrieți vectorii în formă mai simplă: a) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{a}$

b) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{BC} - 2\vec{BA}$.

Ex_2) ΔABC ; $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$. Fie M - mijlocul [BC] și N - mijlocul [AC].

Să se exprime vectorii următori în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$:

a) $\vec{AC}$; b) $\vec{AC} + 3\vec{BC} - 4\vec{BA}$; c) $\vec{AM} + \vec{BN}$; d) $\vec{MN}$

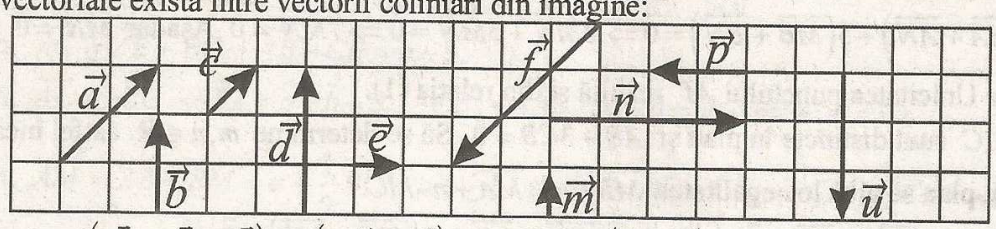
Ex_3) Fie ABCD - paralelogram, $M \in (AB)$, $N \in (DM)$; $AM = MB$ și $MD = 3MN$.

Demonstrați că punctele A, N, C - coliniare.

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Ce relaţii vectoriale există între vectorii coliniari din imagine:



2. Calculaţi : a) $5\left(7\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)-4\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$; b) $3\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)-2\vec{a}-2\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$;

c) $\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+3\left(2\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}\right)-6\vec{c}$.

3. Aflaţi vectorul $\vec{x}$ verificând egalităţile :

a) $2\left(\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}\right)-\vec{x}+3\left(\vec{x}-\vec{u}-\vec{w}\right)=\vec{w}-\vec{u}-4\vec{v}$; b) $\frac{1}{3}\left(\vec{u}-\vec{x}\right)=\frac{2}{3}\left(\vec{x}-\vec{v}\right)$.

4. Fie vectorii $\vec{i},\vec{j},\vec{u},\vec{v}$ astfel încât: $\begin{cases}2\vec{i}-2\vec{j}=\vec{u}\\ \vec{i}-2\vec{j}=\vec{v}\end{cases}$. Exprimaţi vectorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ în funcţie de $\vec{u}$ şi $\vec{v}$.

5. Considerăm segmentul $[AB]$ şi punctul $M\in AB$. Construiţi punctul M în următoarele situaţii:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}$; d) $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{MB}$.

6. a) Fie un triunghi ABC şi $M\in AB$, $N\in AC$, astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Să se arate că $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

b) Fie A, B două puncte distincte din planul $\mathscr{P}$ şi M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă O este un punct arbitrar din $\mathscr{P}$, atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$. Deduceţi că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

7. $ABCD$ trapez, $AB\parallel DC$ şi $AC\cap BD=\{O\}$.

a) Exprimaţi $\overrightarrow{OC}$ în funcţie de $\overrightarrow{OB}$; b) Exprimaţi $\overrightarrow{DO}$ în funcţie de $\overrightarrow{OA}$;
c) Demonstraţi vectorial proprietatea liniei mijlocii a unui trapez.

8. Fie $ABCD$ un pătrat şi O centrul său. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{OD}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$.

9. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AF}$.

10. Fie triunghiul ABC:

a) Construiţi punctele M, N, P astfel încât: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

b) Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$;
c) Arătaţi că punctele M, N, şi P sunt coliniare şi că N este mijlocul lui $[MP]$;

d) Construiţi punctele Q şi R astfel încât $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ şi arătaţi că $MN\parallel QR$.

11. Pe laturile unui paralelogram $ABCD$ se consideră punctele M şi N astfel încât: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{AD}$.

a) Scrieţi vectorii $\overrightarrow{NC}$ şi $\overrightarrow{CM}$ ca o combinaţie liniară de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$;

b) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{NC}$ şi $\overrightarrow{CM}$ sunt coliniari.

12. Fie $ABCD$ un pătrat şi M, N mijloacele laturilor BC şi CD. Să se demonstreze relaţiile:

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

13. Fie ABC un triunghi, iar A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; b) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$; c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$,

unde G este centrul de greutate al triunghiului.

14. Fie $ABCD$ un patrulater, în care M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Să se arate că: a) $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$; b) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AC}$;

c) arătaţi că, la orice patrulater convex, cu o diagonală şi cele două segmente care unesc laturile, se poateconstrui un triunghi.

15. Fie MNP un triunghi şi L un punct din plan. Dacă I, J, K sunt respectiv mijloacele laturilor $[NP]$, $[PM]$, $[MN]$, arătaţi că: a) $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}=2\overrightarrow{LK}$; b) $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{LI}+\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{LK}$.

Aprofundare

16. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele M, N, P, Q, R astfel încât: $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QC}=-2\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{RB}$.

Să se arate că $\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QB}$.

17. Fie $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul laturii $[AB]$ şi $N\in(DM)$ astfel încât $\frac{MN}{ND}=\frac{1}{2}$.

Arătaţi că: a) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$; b) $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{AN}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

18. Fie un triunghi ABC, $\vec{u}$ versorul lui $\overrightarrow{AB}$ şi $\vec{v}$ versorul lui $\overrightarrow{AC}$. Să se arate că $\vec{u}+\vec{v}$ este un vector coliniar cu bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$.

19. Fie triunghiul ABC. Determinaţi vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ astfel încât $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ şi $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, apoi construiţi punctele D şi E astfel încât $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AE}$.

20. Pe catetele AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC se consideră în exterior pătratele $ACDE$ şi $ABMN$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AM}$ sunt coliniari.

21. Fie $ABCD$ un trapez $AB\parallel DC$, EF linia mijlocie a trapezului, M şi N mijloacele bazelor, iar G mijlocul segmentului MN. Să se demonstreze vectorial că punctele E, G, F sunt coliniare.

22. Pe latura $[AD]$ a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul K, astfel încât $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, iar pe diagonala AC, punctul L astfel încât $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{KL}$ şi $\overrightarrow{LB}$ sunt coliniari; b) Să se determine raportul $\frac{KL}{LB}$.

23. Fie ABC un triunghi. Determinaţi punctul D, pentru care $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}-5\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

24. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Să se construiască punctele M, N, P, Q astfel încât:

a) $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{BC}$; c) $2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{DA}$; d) $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\vec{0}$.

Să se precizeze mijlocul segmentului $[PQ]$.

25. Fie $ABCD$ şi $CDEF$ două paralelograme. Exprimaţi în funcţie de $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ suma $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EF}$. Construiţi un reprezentant cu originea în A al acestei sume. Generalizare.

26. Fie un triunghi ABC şi $M\in(AB)$, $N\in(AC)$, astfel încât $\frac{AM}{MB}=2$ şi $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{3}$. Dacă P este mijlocul segmentului $[MN]$, să se exprime vectorul $\overrightarrow{AP}$ ca o combinaţie liniară de vectorii