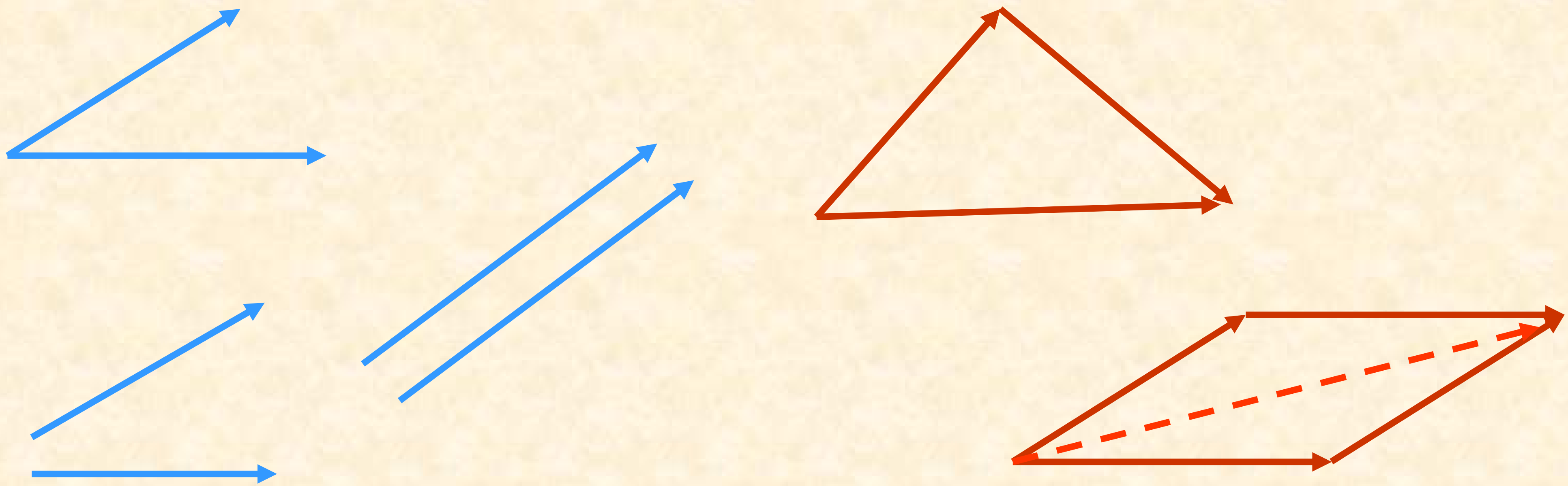
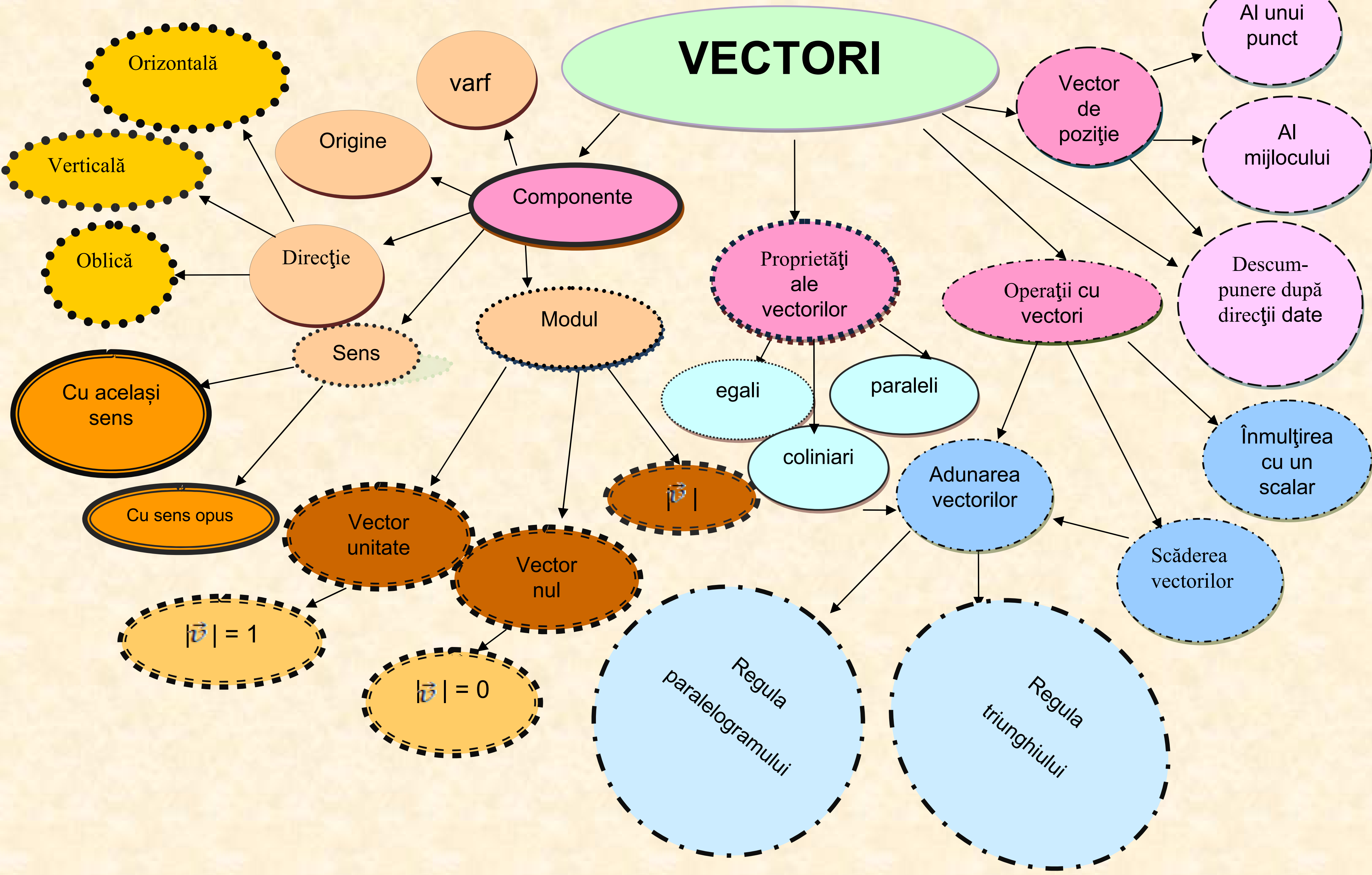
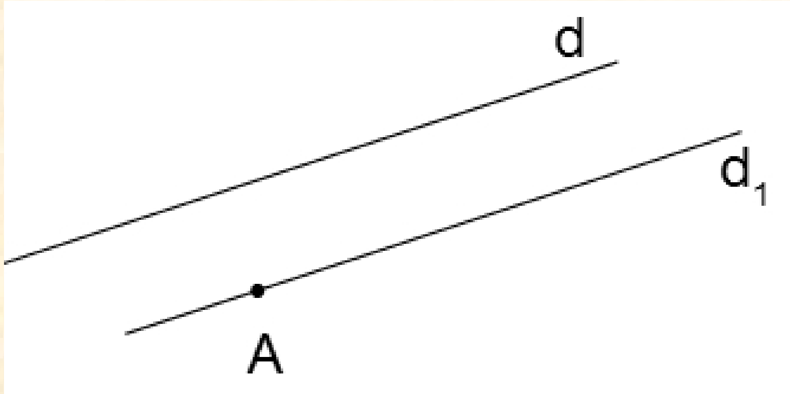
VECTORI ÎN PLAN



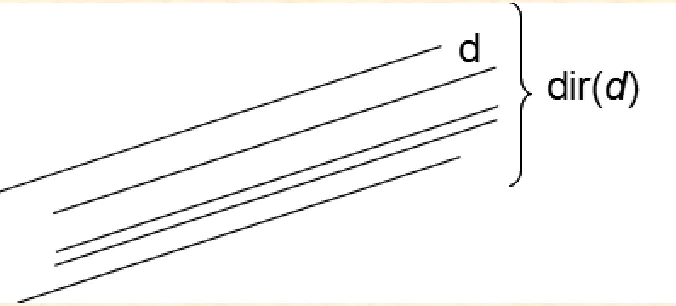
Ce vom învăța în acest capitol ?



Segment orientat, relaţia de echipolenţă, vectori



Fie d o dreaptă în planul P.
Vom spune că dreapta d_1 are aceeași direcție cu dreapta d dacă $d_1 \parallel d$ sau $d_1 = d$.

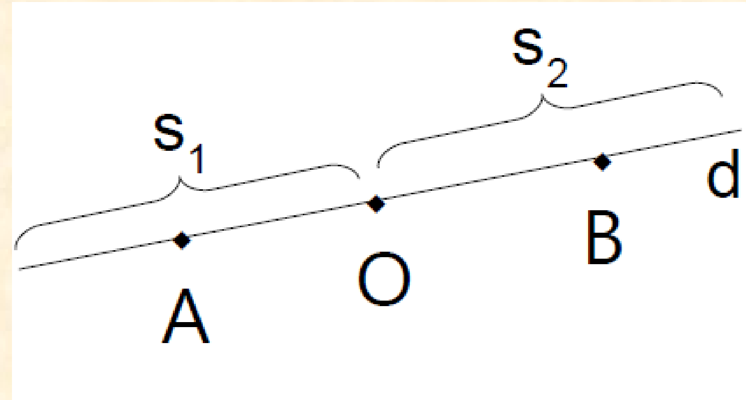


Mulțimea tuturor dreptelor din plan care au aceeași direcție cu dreapta *d* formează *direcția dreptei d*, notată dir(*d*).

OBSERVAŢII:

1) Două drepte concurente din planul *P* au direcții diferite.
2) Printr-un punct se pot duce o infinitate de drepte concurente. Rezultă că în plan există o infinitate de direcții.
3) Proprietatea de simetrie: dacă *d* și *d'* au aceeași direcție, atunci *d'* și *d* au aceeași direcție.
4) Proprietatea de tranzitivitate: dacă d_1 și d_2 au aceeași direcție, și dacă d_2 și d_3 au aceeași direcție, atunci d_1 și d_3 au aceeași direcție.

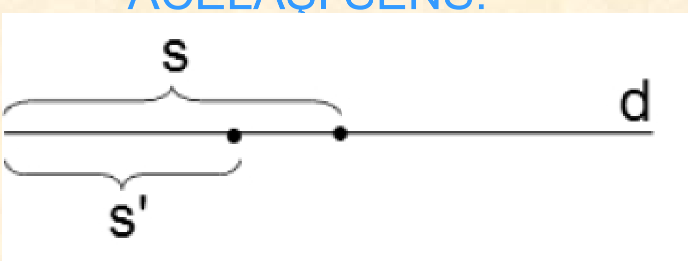
Fie *d* o dreaptă în plan.
Orice punct *O* de pe d dreaptă determină pe dreapta *d* exact două semidrepte s_1 și s_2.

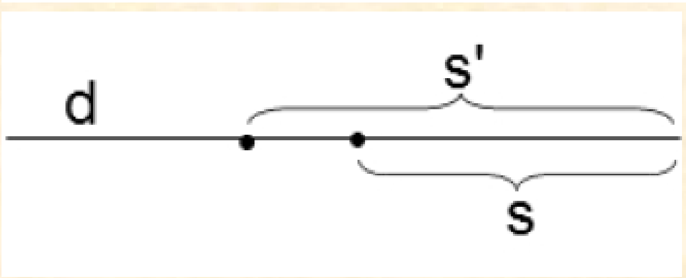


Dacă A este un punct de pe semidreapta s_1, iar B este un punct de pe semidreapta s_2, deplasarea de la *O* spre A şi de la *O* spre B se face în sensuri diferite. Astfel, cele două semidrepte [OA și [OB determină pe dreapta *d* două *sensuri* diferite (opuse).

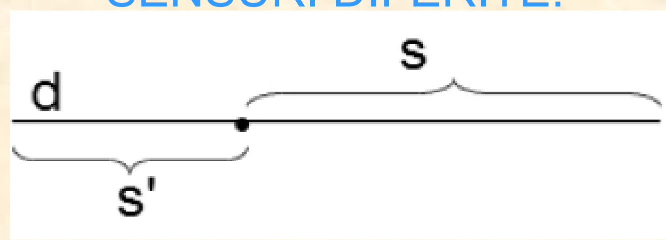
DEFINIŢIE: Două semidrepte *s* și *s'* pe dreapta *d* au *același sens* dacă $s \subset s'$ sau $s' \subset s$ şi au *sensuri diferite* dacă $s \not\subset s'$ şi $s' \not\subset s$.

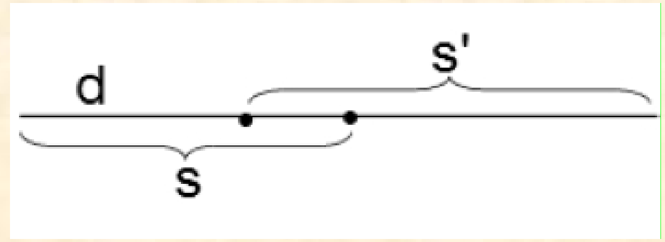
ACELAȘI SENS:



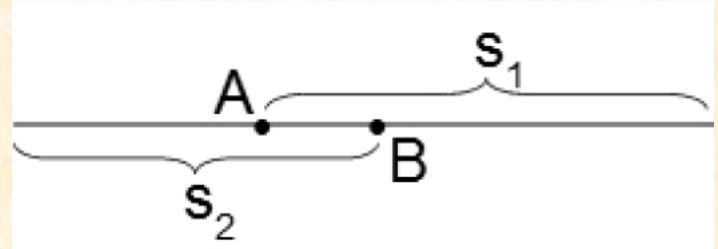


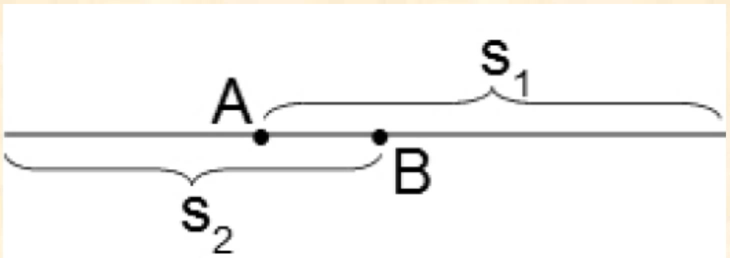
SENSURI DIFERITE:





Fie A,B două puncte diferite în planul *P*. Cele două puncte determină pe dreapta *d*=AB două semidrepte diferite: s_1=(AB şi s_2=(BA. Cele două semidrepte s_1 și s_2 au sensuri diferite.





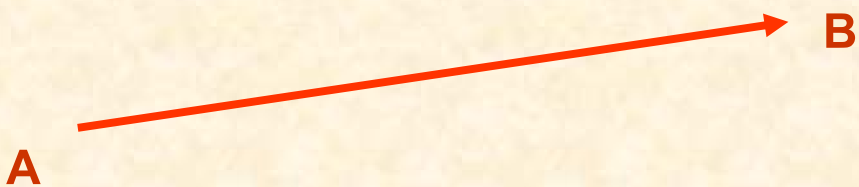
O pereche ordonată (A,B) de puncte ale planului determină, în mod unic:

- ➢ un segment [AB] cu lungimea l=d(A,B);
- ➢ o direcție în plan, direcția dată de dreapta AB;
- ➢ un sens dat de semidreapta s_1=(AB.

Perechea ordonată (B,A) determină același segment [AB], aceeași direcție ca și perechea (A,B), iar sensul determinat de ea este sensul opus sensului determinat de perechea (A,B).

DEFINIŢIE: O pereche ordonată de puncte (A,B) din plan se numește *segment orientat* sau *vector legat*.

Pentru desemnarea segmentului orientat (A,B) se folosește notația $\overline{AB}$ sau $\overrightarrow{AB}$.

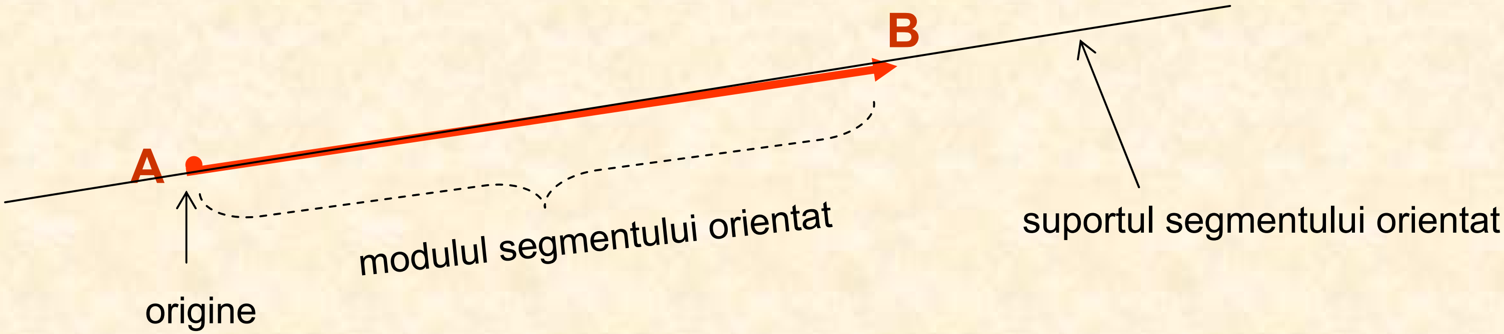


DEFINIŢII:

1) Punctul A se numește *originea (punctul de aplicație)*, iar B *extremitatea (vârful)* segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$

2) Lungimea seg. [AB] se numește *modulul* segmentului orientat și se notează $/\overrightarrow{AB}/$

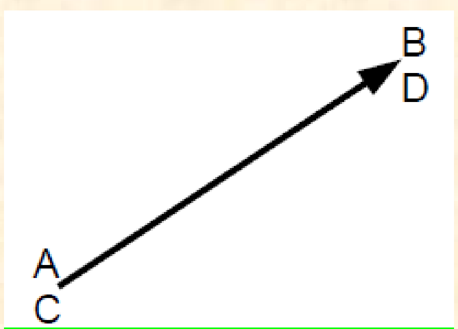
3) Dreapta AB se numește *suportul* segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$, iar direcția se numește *direcția segmentului orientat* $\overrightarrow{AB}$



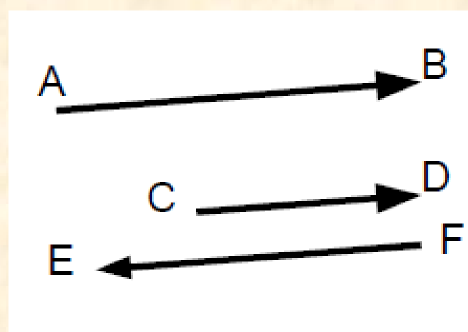
DEFINIŢII:

1) Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și sunt *egale* dacă A=C și B=D.
2) Două segmente orientate care au aceeași direcție se numesc *coliniare*.
3) Segmentul orientat pentru care originea coincide cu extremitatea se numește *segment nul (vector nul)* și se notează $\vec{0}$

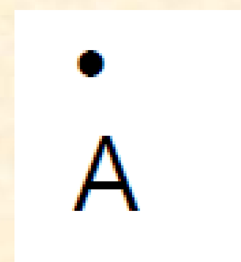
1)



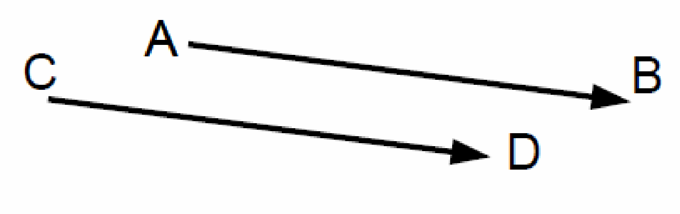
2)



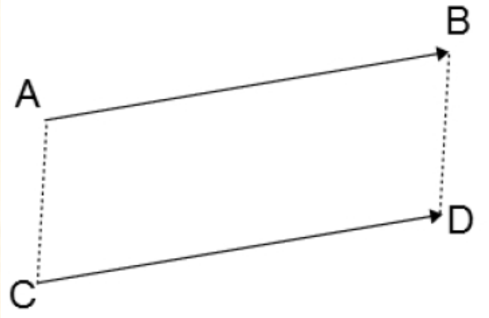
3)



DEFINIŢIE:



Două segmente orientate $\vec{a}$, $\vec{b}$ se numesc *echipolente* dacă au același modul, aceeași direcție și același sens.
Notație: $\vec{a} \sim \vec{b}$

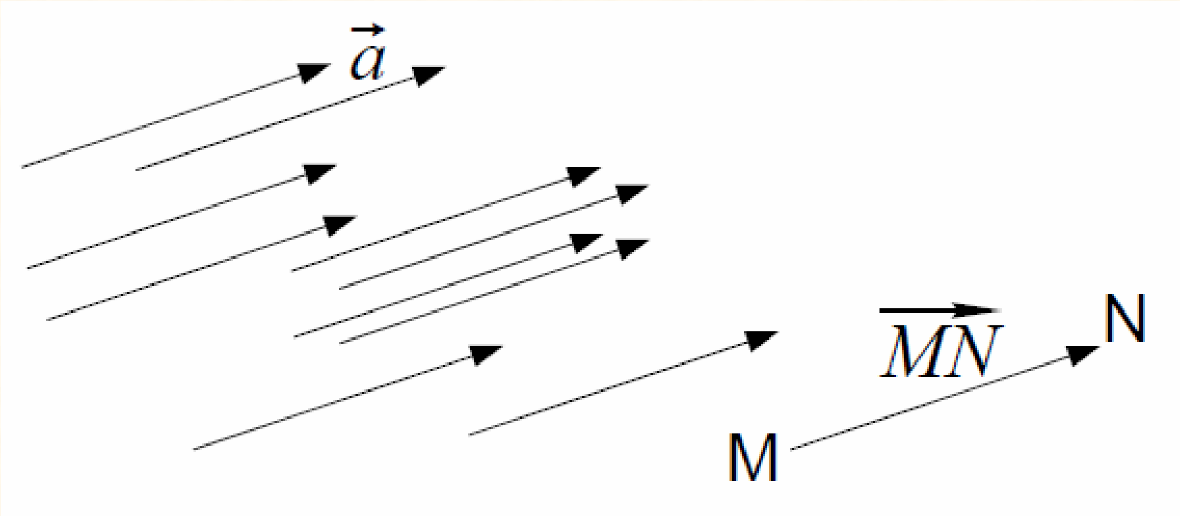


OBSERVAȚIE: Dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, iar dreptele AB și CD sunt diferite, atunci punctele A,B,C,D sunt vârfurile unui paralelogram.

DEFINIŢIE:

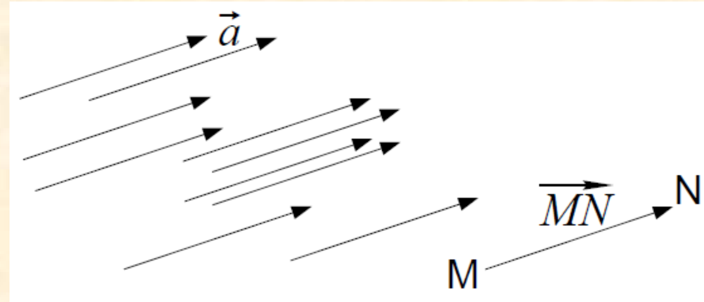
Se numește *vector liber* mulțimea tuturor seg. orientate echipolente cu un seg. orientat dat.

Vectorii liberi se vor nota fie cu litere mici $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...
fie specificând un reprezentant al acestuia dat de un segment orientat $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$,...

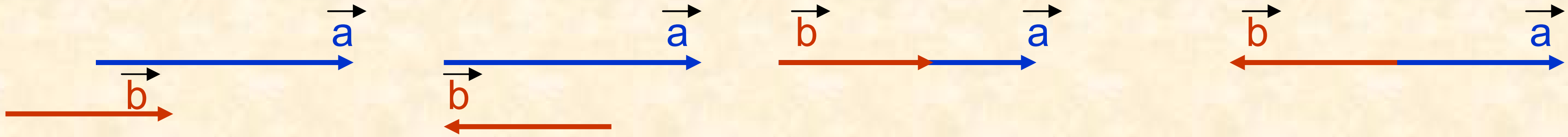


Vectori, vectori coliniari

Se numește *vector liber* mulțimea tuturor seg. orientate echipolente cu un seg. orientat dat. Vectorii liberi se vor nota fie cu litere mici $\vec{a}, \vec{b}, \ldots,$ fie specificând un reprezentant al acestuia dat de un segment orientat $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \ldots$



DEFINIŢIE: Doi vectori se numesc vectori coliniari dacă au aceeaşi direcţie.



DEFINIŢIE: Doi vectori se numesc vectori echipolenţi dacă au aceeaşi direcţie, sens şi modul.

DEFINIŢIE: Segmentul orientat pentru care originea coincide cu extremitatea se numește *segment nul (vector nul)* și se notează $\vec{0}$

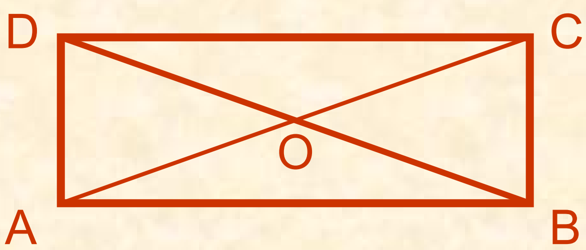
Aplicaţii

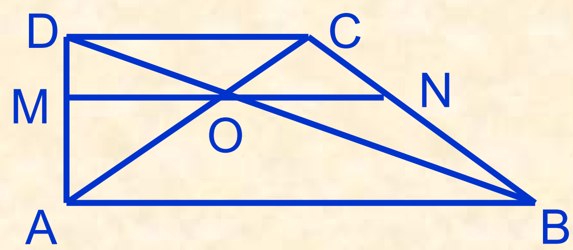
Pentru fig. de mai jos, scrieţi perechi de vectori:

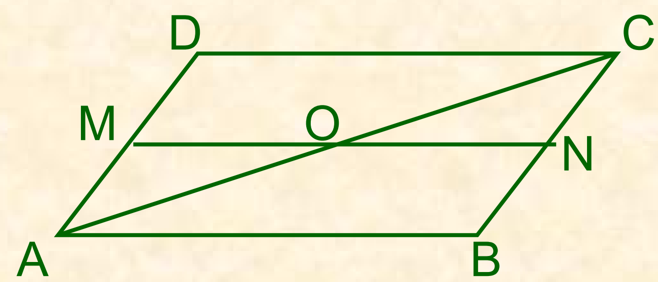
a) Cu aceeaşi direcţie şi sens dar cu module diferite

b) Cu aceeaşi direcţie, sens opuse dar cu module egale

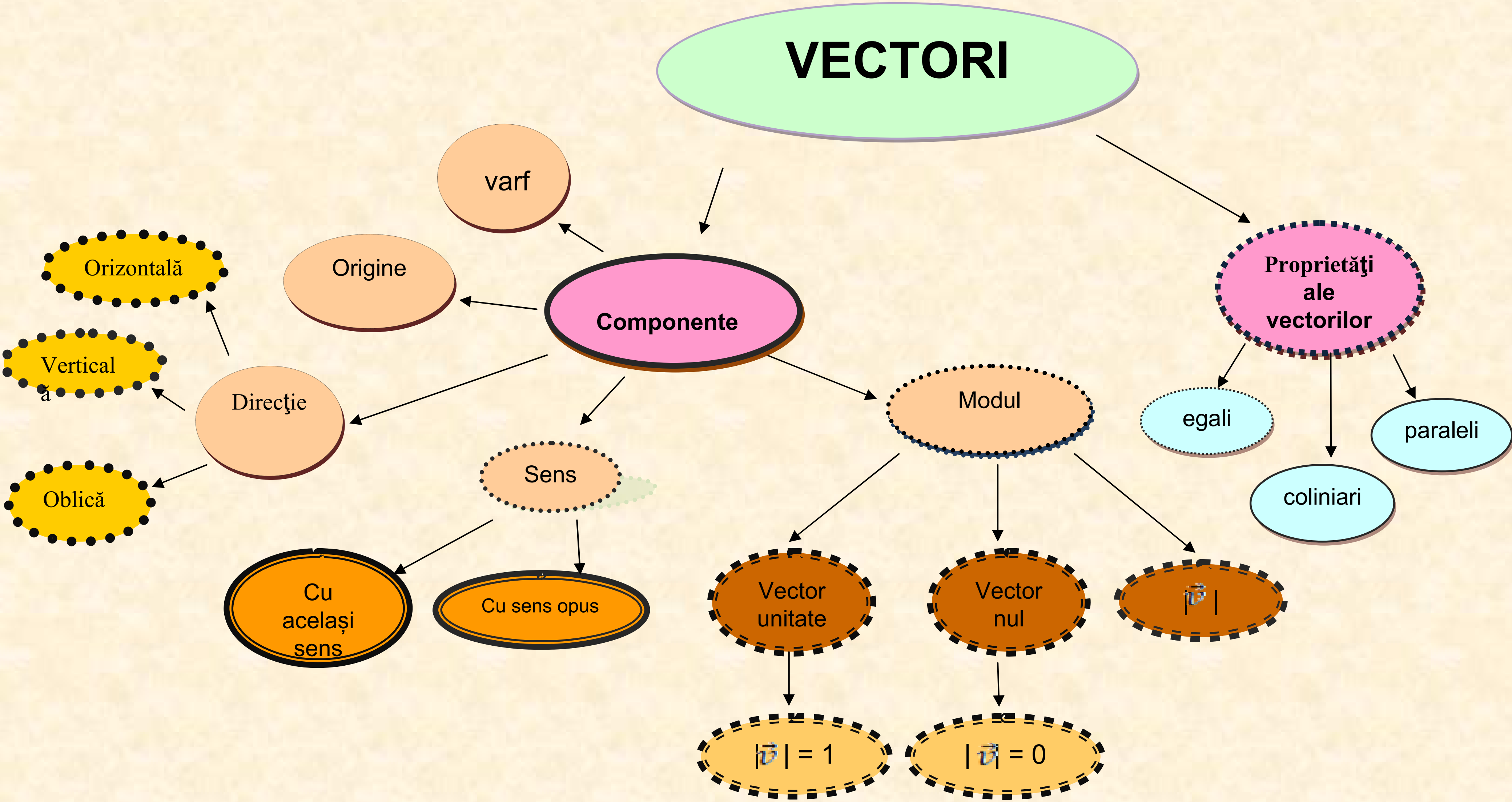
c) Vectori coliniari







1.


VECTORI
varf
Origine
Componente
Orizontală
Vertical
ă
Direcţie
Oblică
Sens
Modul
Proprietăţi
ale
vectorilor
egali
paraleli
coliniari
Cu
același
sens
Cu sens opus
Vector
unitate
Vector
nul
$|\vec{v}|$
$|\vec{v}| = 1$
$|\vec{v}| = 0$

Adunarea vectorilor

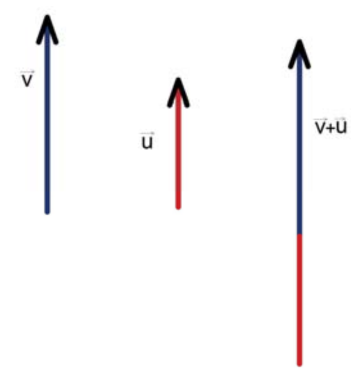
Pentru a aduna doi vectori, mai întâi alegem câte un reprezentant al lor; atunci, practic, ne rezumăm la adunarea vectorilor legați.

În cadrul acestei secțiuni vom trata următoarele două cazuri: adunarea vectorilor coliniari și adunarea vectorilor necoliniari (oarecare)

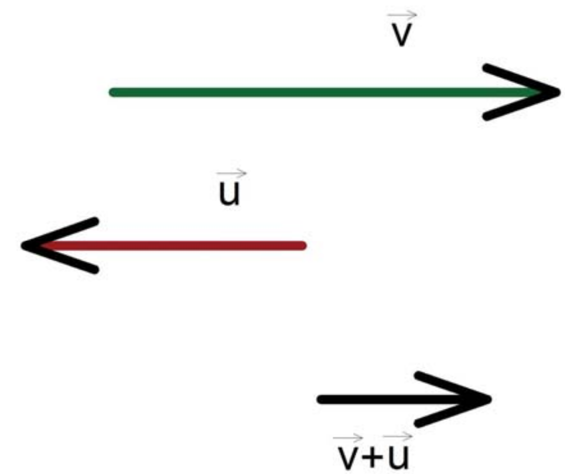
Adunarea vectorilor coliniari

Dacă vectori sunt coliniari atunci ei au aceeași direcție.
În primul rând să luăm vectorii $\vec{u}$, respectiv $\vec{v}$, ca având același sens.
Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v}$ va avea aceeași direcție și acelaşi sens cu vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$, iar modulul sau lungimea lui va fi suma modulelor celorlalți doi :

$$|\overrightarrow{u+v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$$



Acum să luăm vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$, ca având sensuri opuse.

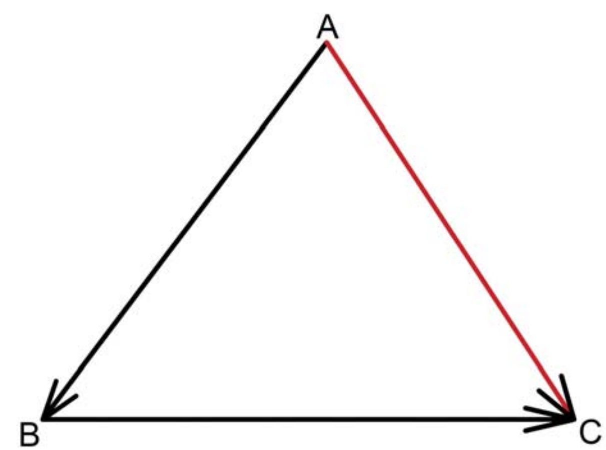


În acest caz, vectorul sumă va avea aceeași direcție cu cei doi vectori și sensul celui cu modulul mai mare, iar lungimea lui va fi egală cu diferența molulelor celor doi vectori.

Adunarea vectorilor necoliniari (oarecare)

Adunare a doi sau mai mulți vectori se face după anumite reguli, astfel că avem două cazuri:
1. Adunarea a doi vectori după regula triunghiului.
2. Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului

1. Adunarea a doi vectori după regula triunghiului

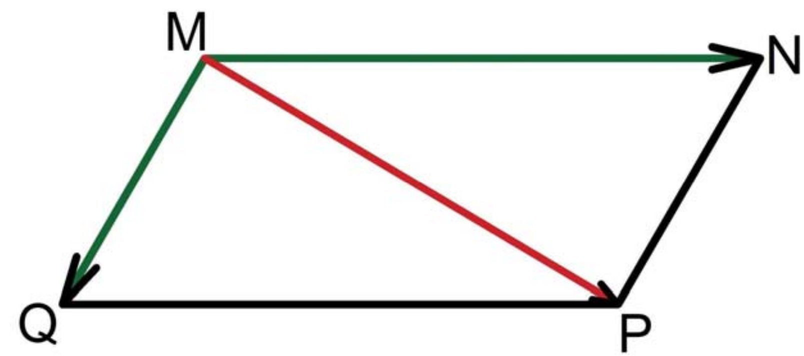


În acest caz avem de adunat doi vectori consecutivi, adică vârful primului vector coincide cu originea celui de-al doilea vector

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

2. Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului

Avem, în figura alaturată este reprezentat un paralelogram.



În cazul de față avem doi vectori a căror origine coincide.

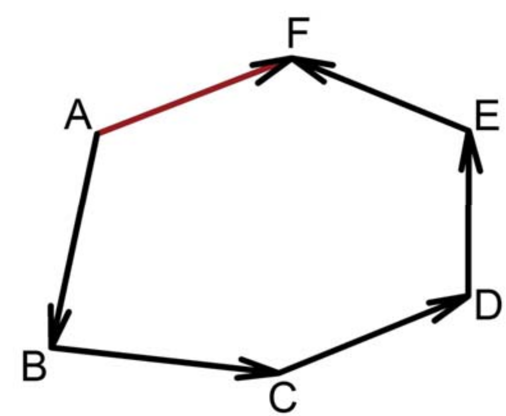
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$$

Observație: Vectorul sumă va avea aceeași origine cu vectorii pe care îi avem de adunat

Adunarea mai multor vectori după regula patrulaterului

Această regulă este o extindere a regulii triunghiului, cu menționarea faptului că avem mai mulți vectori consecutivi, adică vectori în care vârful unuia coincide cu originea celuilalt.

Atunci va trebui să închidem poligonul care este compus din vectorii respectivi, iar vectorul sumă va avea originea primului vector și vârful ultimului vector.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Proprietăți ale operației de adunare a vectorilor

Adunarea vectorilor este:

Asociativă: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Comutativă: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Are ca și element neutru vectorul nul $\vec{0}$

Are ca și element simetric (opus) vectorul $-\vec{u}$ *și astfel, avem relația:* $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Observație:

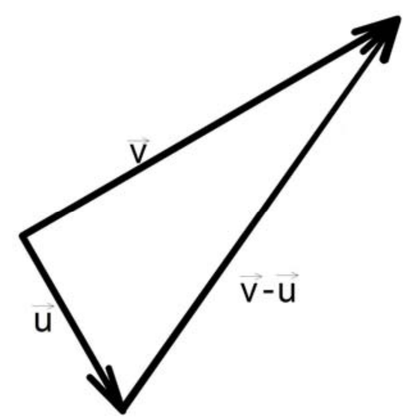
Vectorul opus $-\vec{u}$ are aceeași lungime și aceeași direcție cu vectorului $\vec{u}$, *însă sens contrar.*

Diferența a doi vectori

Diferența vectorilor $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ *reprezintă suma vectorului* $\vec{u}$*, cu opusul vectorului* $\vec{v}$*, adică* $-\vec{v}$*, fiind dată de următoarea relație:*

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Obs: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



Aplicație. *Pentru a înțelege mai bine cum se adună doi vectori, profesorii noștri de matematică ți-au pregătit următoarea aplicație*

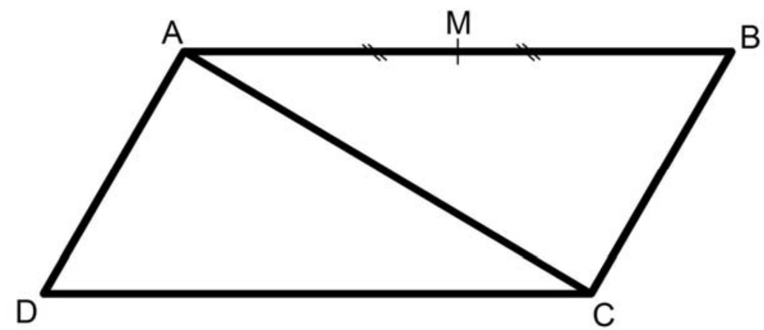
Fie ABCD un paralelogram, iar M mijlocul segmentului [AB]. Să se calculeze:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Înmulțirea cu scalari a vectorilor

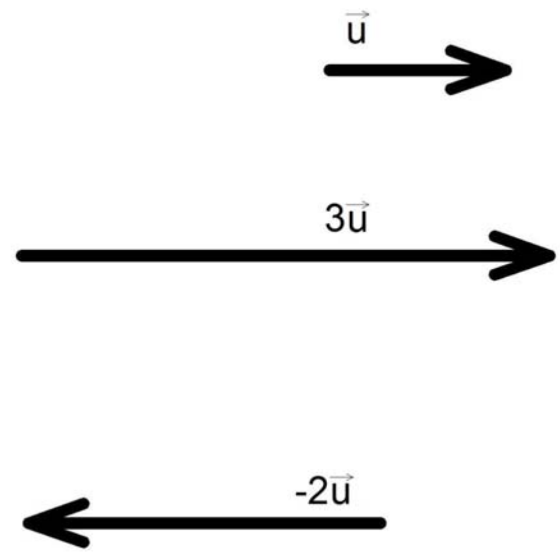
Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real și $\vec{u}$ un vector din plan

Produsul vectorului $\vec{u}$ cu numărul α este un vector, notat $\alpha\vec{u}$, care își schimbă sensul astfel:

$$\alpha\vec{u} = \begin{cases} \alpha\vec{u}, & \alpha > 0 \\ \vec{0}, & \alpha = 0 \\ -\alpha\vec{u}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Așadar, în cazul cel mai simplu, când $\alpha = 0$, produsul este vectorul nul, $\vec{0}$.

Lungimea vectorului va fi: $|\alpha \cdot \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$



Proprietăți ale înmulțirii unui vector cu un scalar

Fie vectorii $\vec{u}$, respectiv $\vec{v}$ și scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, *oricare ar fi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *și oricare ar fi vectorii* $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ *;*

(a înmulți un scalar cu o sumă, înseamnă a înmulți acel scalar cu fiecare termen al sumei, apoi adunând rezultatele - distributivitatea înmulțirii față de adunare)

2. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$, *oricare ar fi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *și oricare ar fi vectorul* $\vec{u}$ *;*

(distributitvitatea înmulțirii față de adunare - fiecare scalar este înmulțit cu vectorul $\vec{u}$ *, iar apoi rezultatele se adună)*

3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$, *oricare ar fi scalarii* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *și oricare ar fi vectorul* $\vec{u}$ *;* *(asociativitatea)*

4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ *(elementul neutru al înmulțirii este vectorul unitate)*